**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**Решења задатака**

## Први разред – А категорија

**1.** Од почетног броја $x$ могуће је добити бројеве $\frac{1}{x}$ и $x+1$, а затим од $x+1$ добити $\frac{1}{x+1}$. Сада због $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$ можемо добити и број $\frac{1}{x^2+x}$, а онда од њега и број $\frac{1}{\frac{1}{x^2+x}}=x^2+x$. Најзад, од бројева $x^2+x$ и $x$ добијамо $(x^2+x)-x=x^2$.

**2.** Нека је $k$ број цифара и $n=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_1}$. За $k=1$ евидентно нема решења. За $k=2$ имамо $10a_2+a_1=a_2a_1+18$, одакле следи $a_2=\frac{18-a_1}{10-a_1}=1+\frac{8}{10-a_1}$, те закључујемо $10-a_1\in\{1,2,4,8\}$, тј. $a_1\in\{9,8,6,2\}$. Дакле, решења за $k=2$ су: $\{22,36,58,99\}$. Показаћемо да за $k\geqslant 3$ нема решења, тј. да су малочас набројана решења и једина. Заиста, имамо

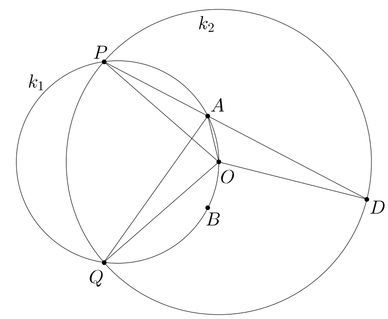
$$P(n)+18=a_ka_{k-1}\cdots a_1+18\leqslant a_k\cdot 9^{k-1}+18\leqslant a_k(9^{k-1}+18)<a_k\cdot 10^{k-1}\leqslant \overline{a_ka_{k-1}\ldots a_1}=n$$

(неједнакост $9^{k-1}+18<10^{k-1}$ за $k\geqslant 3$ директно се показује индукцијом, индукцијски корак је $9^k+18<9(9^{k-1}+18)<9\cdot 10^{k-1}<10^k$), чиме је задатак решен.

**3.** Једнакост $a^2+b^2+c^2=d^2$ еквивалентна је са $a^2+b^2=(d-c)(d+c)$. Претпоставимо најпре да је један од бројева $a$ и $b$ паран. Уколико је други број непаран, тада је израз $a^2+b^2$ непаран; у том случају одговарајуће бројеве $c$ и $d$ можемо наћи решавајући систем $d-c=1$ и $d+c=a^2+b^2$ (добијају се решења $c=\frac{a^2+b^2-1}{2}$ и $d=\frac{a^2+b^2+1}{2}$, што јесу природни бројеви). Уколико је и други број паран, тада је израз $a^2+b^2$ дељив са 4, па у том случају одговарајуће бројеве $c$ и $d$ можемо наћи решавајући систем $d-c=2$ и $d+c=\frac{a^2+b^2}{2}$ (добијају се решења $c=\frac{a^2+b^2}{4}-1$ и $d=\frac{a^2+b^2}{4}+1$, што јесу природни бројеви).

Узмимо сада да важи $a^2+b^2=(d-c)(d+c)$, и докажимо да је бар један од бројева $a$ и $b$ паран. Претпоставимо супротно: нека су и $a$ и $b$ непарни бројеви. Тада важи $a^2\equiv 1 \pmod 4$ и $b^2\equiv 1 \pmod 4$, па следи $a^2+b^2\equiv 2 \pmod 4$. С друге стране, ако су $c$ и $d$ исте парности, тада су оба израза $d-c$ и $d+c$ парна, па је њихов производ (што је $a^2+b^2$) дељив са 4, контрадикција; ако су пак $c$ и $d$ различите парности, тада је њихов производ непаран, и поново контрадикција. Тиме је задатак решен.

**4.** Лукови $\widehat{PB}$ и $\widehat{AQ}$ су једнаке дужине, па је довољно доказати да важи $AD=AQ$. Нека је $O$ центар круга $k_2$. Како имамо $\measuredangle ADO=\measuredangle PDO=\measuredangle DPO=\measuredangle APO=\measuredangle AQO$, следи $\triangle QAO\cong\triangle DAO$ (јер им је још страница $AO$ заједничка, и важи $\measuredangle DAO=\measuredangle QAO$), па добијамо $AD=AQ$.




Ок 2015 1А 4

**5.** Важи $a-b=0$, тј. $a=b$. Доказаћемо да можемо успоставити бијекцију између оних распореда чији смо број обележили са $a$ (назовимо их „распореди типа А“) и оних распореда чији смо број обележили са $b$ (назовимо их „распореди типа Б“). Нека је уочен један распоред типа А, и нека у том распореду Мика седи на седишту $M$ а слободно је седиште $S$. Овом распореду придружимо распоред у ком Мика седи на седишту $S$ а слободно је седиште $M$ (преостали гледаоци остају где су и били). Није тешко видети да је придружени распоред типа Б (заиста, приметимо да, у моменту када у уоченом распореду типа А Мику подиже неки гледалац, тада ће у том моменту у придруженом распореду тај гледалац управо имати могућност да седне на слободно седиште), као и да је овакво придруживање заиста бијекција између свих распореда типа А и свих распореда типа Б.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике.*

## Други разред – А категорија

**1.** Из прве једначине добијамо $v=\frac{3u+1}{u+1}$. Аналогно имамо $u=\frac{3w+1}{w+1}$ и $w=\frac{3v+1}{v+1}$. Сада следи:

$$v=\frac{3u+1}{u+1}=\frac{3\cdot\frac{3w+1}{w+1}+1}{\frac{3w+1}{w+1}+1}=\frac{5w+2}{2w+1}=\frac{5\cdot\frac{3v+1}{v+1}+2}{2\cdot\frac{3v+1}{v+1}+1}=\frac{17v+7}{7v+3}.$$

Одавде добијамо квадратну једначину $v^2 - 2v - 1 = 0$. Њена решења су $v = 1 + \sqrt{2}$ и $v = 1 - \sqrt{2}$. Израчунавајући $u$ и $w$ који се добијају у ова два случаја, добијамо два решења полазног система: $u = v = w = 1 + \sqrt{2}$ и $u = v = w = 1 - \sqrt{2}$.

**2.** Нека су $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ две од могућности између којих Раја не може да се определи. Можемо претпоставити, без умањења општости, $x_1 \leqslant x_2$. Нека су $n_1$ и $n_2$ бројеви који се добијају када се обрисане цифре замене цифрама из уређеног пара $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$, респективно. Тада имамо

$$n_2 - n_1 = (x_2 - x_1)10^{t+k} + (y_2 - y_1)10^t$$

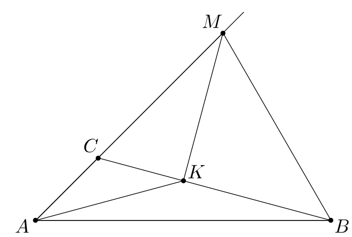
за неки природан број $t$ и непаран број $k$ ($k$ је непаран број јер се између обрисаних цифара налази $k-1$ цифра, а по услову задатка ова вредност је парна). Како $n_1$ и $n_2$ дају исте остатке при дељењу са 9 и такође при дељењу са 11, следи да је разлика $n_2 - n_1$ дељива са 99, па добијамо $99 \mid (x_2 - x_1)10^k + (y_2 - y_1)$. Из $10^2 \equiv 1 \pmod{99}$ због $2 \nmid k$ следи $10^k \equiv 10 \pmod{99}$, па добијамо $99 \mid 10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$. Како су $x_1, x_2, y_1, y_2$ цифре и $x_1 \leqslant x_2$, следи $0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant 9$ и $-9 \leqslant y_2 - y_1 \leqslant 9$, тј.

$$-9 \leqslant 10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \leqslant 99.$$

Према томе, $10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 0$ или $10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 99$. У првом случају одмах добијамо $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, тј. $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$, што је немогуће. Остаје други случај, који се постиже само за $x_2 - x_1 = 9$ и $y_2 - y_1 = 9$, тј. за $x_2 = 9$, $x_1 = 0$, $y_2 = 9$ и $y_1 = 0$.

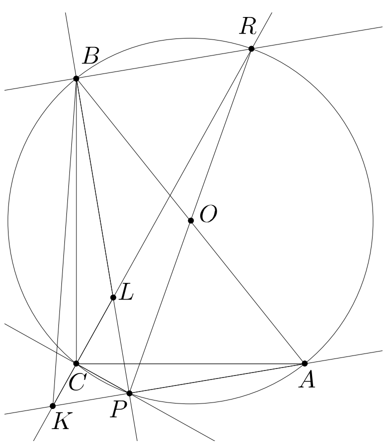
Дакле, Раја не може да се определи између тачно две могућности, и то су $(0, 0)$ и $(9, 9)$.

**3.** *Прво решење.* Израчунавамо $\measuredangle BCA = 120°$. На дужи $CB$ уочимо тачку $K$ такву да важи $CA = CK$. Из $\measuredangle KCM = 60°$ и $CM = 2CK$ добијамо $\measuredangle CKM = 90°$ (јер је $\triangle CMK$ половина једнакостраничног троугла). Будући да је $\triangle ACK$ једнакокрак, следи $\measuredangle KAC = \measuredangle CKA = 30°$. Одатле израчунавамо $\measuredangle MKA = \measuredangle AKC + \measuredangle CKM = 120°$, а сада добијамо и $\measuredangle AMK = 30°$. Закључујемо да је и $\triangle AKM$ једнакокрак, тј. $AK = KM$. Такође имамо $\measuredangle BAK = \measuredangle BAC - \measuredangle KAC = 45° - 30° = 15°$, па је и $\triangle AKB$ једнакокрак, тј. $AK = KB$. Одатле је $\triangle MKB$ једнакокрако-правоугли, те следи $\measuredangle KBM = \measuredangle KMB = 45°$. Најзад, $\measuredangle AMB = 45° + 30° = 75°$.




Ок 2015 2А 3

*Друго решење.* Означимо $AC = x$ и $CB = y$. На основу синусне теореме за $\triangle ABC$ имамо: $\frac{x}{\sin 15°} = \frac{y}{\sin 45°}$, па добијамо $x = \frac{y \sin 15°}{\sin 45°} = y\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (приметимо, $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$). Применом косинусне теореме на $\triangle MBC$ имамо $MB^2 = (2x)^2 + y^2 - 4xy\cos 60°$, па после сређивања остаје $MB^2 = (6 - 3\sqrt{3})y^2 = \frac{3}{2}(4 - 2\sqrt{3})y^2$, тј. $MB = \frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3} - 1)y$. Означимо $\measuredangle AMB = \varphi$. Поново из косинусне теореме имамо $CB^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cos\varphi$, па после замене ових вредности и скраћивања добијамо $\cos\varphi = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{4\sqrt{6} - 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Одатле закључујемо $\varphi = 75°$.




Ок 2015 2А 4

**4.** Означимо са $R$ тачку дијаметрално супротну тачки $P$ (кроз њу пролази и права $CK$, будући да је нормална на $CP$). Тада имамо $BR \parallel PA$, па следи $P_{\triangle PBK} = P_{\triangle PRK}$, а због тога и $P_{\triangle BKL} = P_{\triangle LPR}$. Пошто важи $PA = BR$, имамо $\measuredangle PCA = \measuredangle BPR = \measuredangle LPR$; такође имамо $\measuredangle CAP = \measuredangle CRP$, па су $\triangle LPR$ и $\triangle PCA$ слични. Дакле, $P_{\triangle BKL} : P_{\triangle PCA} = P_{\triangle LPR} : P_{\triangle PCA} = PR^2 : AC^2 = AB^2 : AC^2$.

**5.** Означимо са $a$, $b$, $c$ и $d$ број подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ чија кардиналност при дељењу са 4 даје остатак 0, 1, 2 или 3, респективно. Број посматраних подскупова који имају паран број елемената једнак је броју посматраних подскупова који имају непаран број елемената (што се може видети на основу, рецимо, биномног развоја израза

$$(1 + x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j, \tag{1}$$

у ком узимамо $x = -1$; тада збир оних биномних коефицијената испред којих је знак „+“ чини тачно број подскупова с парним бројем елемената, а оних испред којих је знак „−“ управо број преосталих подскупова). Овим смо добили

$$a + c = b + d = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}. \tag{2}$$

Посматрајмо поново биномни развој (1), и узмимо $x = i$, где је $i$ имагинарна јединица. Како важи $(1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (-2i)^4 = 16$ и $n$ је дељиво са 8, добијамо $(1 + i)^n = ((1 + i)^8)^{\frac{n}{8}} = 16^{\frac{n}{8}} = 2^{\frac{n}{2}}$, тј.

$$2^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^j. \tag{3}$$

Пошто је $i^j$ једнако 1, $i$, $-1$ или $-i$, условљено са $j \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$, респективно, изједначавањем реалних делова леве и десне стране једнакости (3) добијамо $a - c = 2^{\frac{n}{2}}$, а изједначавањем имагинарних делова добијамо $b - d = 0$.

(Ове једнакости, које су заправо одређени биномни идентитети, могуће је добити и на други начин, без коришћења комплексних бројева, што остављамо заинтересованим такмичарима за вежбу.) Добијене две једнакости заједно са (2) чине једноставан систем од четири једначине с четири непознате, чијим решавањем добијамо $a = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}$, $c = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}$ и $b = d = 2^{n-2}$. Дакле, како имамо $a + b = 2^{n-1} + 2^{\frac{n-2}{2}}$, овај број очито има тачно две јединице у бинарном запису, што завршава доказ.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике.*

## Трећи разред – А категорија

**1.** Означимо $s = 1 + (p-1)!$. На основу Вилсонове теореме имамо $s \equiv 0 \pmod{p}$, а пошто важи и $s \equiv 1 \pmod{p-1}$, добијамо $s \equiv p \pmod{(p-1)p}$. Како су $(p-3)!$ и $p$ узајамно прости, на основу Ојлерове теореме добијамо $((p-3)!)^{\varphi(p^2)} \equiv 1 \pmod{p^2}$, тј. $((p-3)!)^{(p-1)p} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Из претходног и овог закључка следи $((p-3)!)^s \equiv ((p-3)!)^p \pmod{p^2}$. Даље, опет применом Вилсонове теореме добијамо $p-1 \equiv -1 \equiv (p-1)! = (p-1)(p-2)(p-3)! \equiv 2(p-3)! \pmod{p}$, тј. $(p-3)! \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$. Другим речима, за неки цео број $a$ важи $(p-3)! = ap + \frac{p-1}{2}$. Из свега до сада, уз коришћење биномне формуле, добијамо

$$((p-3)!)^s \equiv ((p-3)!)^p = \left(ap + \frac{p-1}{2}\right)^p \equiv p \cdot ap \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-1} + \left(\frac{p-1}{2}\right)^p \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)^p \pmod{p^2}.$$

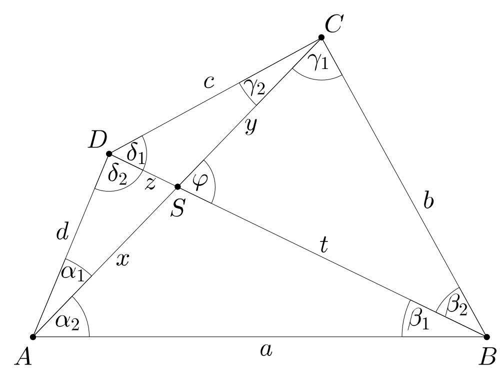
Дакле, постављени задатак своди се на $p^2 \mid \left(\frac{p^2+1}{2}\right)^p + \left(\frac{p-1}{2}\right)^p = \frac{(p^2+1)^p + (p-1)^p}{2^p}$, па је, с обзиром на чињеницу да је $p$ непаран број, довољно доказати $p^2 \mid (p^2+1)^p + (p-1)^p$. Из биномне формуле добијамо $(p-1)^p \equiv (-1)^p = -1 \pmod{p^2}$, што уз тривијално $(p^2+1)^p \equiv 1 \pmod{p^2}$ даје $(p^2+1)^p + (p-1)^p \equiv 1 + (-1) = 0 \pmod{p^2}$, чиме је доказ завршен.

**2.** Означимо $x^2 - yz = a$ и $y^2 - zx = b$. Сабирање датих једначина даје $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2(a+b+c)$. Приметимо одмах да мора важити $a + b + c \geqslant 0$ (ово ће бити потребно касније). Даље, одузимањем друге једначине од прве добијамо $(x-y)(x+y+z) = a - b$, а слично следи $(y-z)(x+y+z) = b - c$ и $(z-x)(x+y+z) = c - a$, па квадрирањем и сабирањем ове три једнакости добијамо $2(a+b+c)(x+y+z)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. Одавде следи $x + y + z = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a+b+c}}$. Обележимо ову вредност са $s$. Из претходних једнакости добијамо $x - y = \frac{a-b}{s}$, $y - z = \frac{b-c}{s}$ и $z - x = \frac{c-a}{s}$. Сада имамо

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(s + (x-y) + (x-z)) = \frac{1}{3}\left(s + \frac{a-b}{s} + \frac{a-c}{s}\right) = \frac{s^2 + 2a - b - c}{3s} \\ &= \frac{1}{3s}\left(\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a+b+c} + 2a - b - c\right) = \frac{a^2 - bc}{s(a+b+c)}, \end{aligned}$$

а аналогно и $y = \frac{b^2-ca}{s(a+b+c)}$ и $z = \frac{c^2-ab}{s(a+b+c)}$. Дакле, за $a = 1$ и $b = 2$ услов $x, y, z \geqslant 0$ своди се на $1 - 2c \geqslant 0$, $4 - c \geqslant 0$, $c^2 - 2 \geqslant 0$ и $a + b + c = c + 3 > 0$, а одавде добијамо $-3 < c \leqslant -\sqrt{2}$.

**3.** Одговор је потврдан. Означимо темена четвороугла $A$, $B$, $C$, $D$, углове код тих темена $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, редом, и странице $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Нека је $S$ пресек дијагонала. Нека су редом $\alpha_1$ и $\alpha_2$ углови на које дијагонала $AC$ дели угао $\alpha$. Аналогно дефинишемо углове $\beta_1$ и $\beta_2$, $\gamma_1$ и $\gamma_2$, $\delta_1$ и $\delta_2$. Нека су одсечци дијагонала $AS = x$, $SC = y$, $DS = z$, $SB = t$, и обележимо још $\measuredangle CSB = \measuredangle ASD = \varphi$, $\measuredangle ASB = \measuredangle CSD = 180^\circ - \varphi$. Из косинусне теореме за $\triangle ABC$ добијамо $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$, па је $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-AC^2}{2ab}$ рационалан број. Из истог троугла на сличан начин добијамо да су и $\cos\gamma_1$ и $\cos\alpha_2$ рационални бројеви. Применом косинусне теореме и на $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$, добијамо да су косинуси свих углова $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ рационални. Како важи $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ и $\cos\alpha$ је рационалан, преко $\cos\alpha = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2$ и $\cos\alpha_1 \in \mathbb{Q}$ и $\cos\alpha_2 \in \mathbb{Q}$ добијамо $\sin\alpha_1\sin\alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Аналогно, $\sin\beta_1\sin\beta_2 \in \mathbb{Q}$, $\sin\gamma_1\sin\gamma_2 \in \mathbb{Q}$ и $\sin\delta_1\sin\delta_2 \in \mathbb{Q}$. Из $\triangle ABD$ имамо $\beta_1 + \delta_2 = 180^\circ - \alpha$, па сада из $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\cos(\beta_1 + \delta_2) = -\cos\beta_1\cos\delta_2 + \sin\beta_1\sin\delta_2$ добијамо $\sin\beta_1\sin\delta_2 \in \mathbb{Q}$. Применом синусне теореме на $\triangle BAS$ и $\triangle ASD$ добијамо $\frac{t}{\sin\alpha_2} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{x}{\sin\beta_1}$ и $\frac{z}{\sin\alpha_1} = \frac{d}{\sin\varphi} = \frac{x}{\sin\delta_2}$. Множењем ових једнакости добијамо $\frac{tz}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} = \frac{ad}{\sin^2\varphi} = \frac{x^2}{\sin\beta_1\sin\delta_2}$, а како су вредности $\sin\alpha_1\sin\alpha_2$, $ad$ и $\sin\beta_1\sin\delta_2$ рационалне, добијамо $tz = \frac{l}{\sin^2\varphi}$ и $x^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi}$ за неке рационалне бројеве $l$ и $p$. Аналогно добијамо $xy = \frac{q}{\sin^2\varphi}$ и $y^2 = \frac{r}{\sin^2\varphi}$, за неке $q, r \in \mathbb{Q}$. Како важи $x + y \in \mathbb{Q}$ ($x + y = d_1$, где је $d_1$ дужина дијагонале




Ок 2015 3А 3

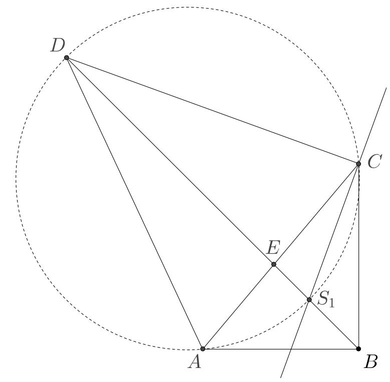
$AC$), из једнакости $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi} + \frac{2q}{\sin^2\varphi} + \frac{r}{\sin^2\varphi}$ добијамо $\sin^2\varphi \in \mathbb{Q}$. Сада из ранијих израза за $x^2$ и $y^2$ добијамо $x^2 \in \mathbb{Q}$ и $y^2 \in \mathbb{Q}$. Коначно, из једнакости $y^2 = (d_1 - x)^2 = d_1^2 - 2d_1x + x^2 \in \mathbb{Q}$ добијамо $x \in \mathbb{Q}$, а тада следи и $y \in \mathbb{Q}$. Исто се доказује и $t \in \mathbb{Q}$ и $z \in \mathbb{Q}$.

**4.** Тврдимо да ће након 2015 корака на табли бити $F_{2016}$ бројева, где смо са $F_{2016}$ обележили 2016. члан Фибоначијевог низа.

Доказаћемо јаче тврђење: након $n$ корака на табли ће укупно $F_{n-1}$ пута бити записан број 1, затим $F_{n-2}$ пута бити записан број 2, $\dots$, $F_1$ пута бити записан број $n-1$, и једном ће бити записан број $n+1$. Докажимо ово индукцијом по $n$. У првом кораку бришемо с табле број 1 а дописујемо број 2, тј. након првог корака на табли се налази само број 2, што одговара тврђењу које доказујемо. Претпоставимо сада да тврђење важи за неко задато $n$, и посматрајмо шта се дешава након корака $n+1$: број 1 ће бити уписан приликом брисања свих бројева од 2 навише, а таквих има $F_{n-2} + F_{n-3} + \cdots + F_1 + 1$; број 2 ће бити уписан приликом брисања свих бројева од 3 навише, а таквих има $F_{n-3} + F_{n-4} + \cdots + F_1 + 1$ итд. Дакле, да бисмо доказали жељено тврђење, довољно је доказати једнакост

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k + 1 = F_{k+2}.$$

Ову једнакост доказујемо индукцијом по $k$. За $k = 0$ једнакост важи. Претпоставимо да једнакост важи за задат број $k$. Из те претпоставке имамо $F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} + 1 = F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$, што је и требало доказати. Овим смо показали и жељено тврђење. Према томе, преостаје само да приметимо да се након 2015 корака на табли налази укупно $F_{2014} + F_{2013} + \cdots + F_1 + 1 = F_{2016}$ бројева.



Ок 2015 3А 5

**5.** Уочавамо да важи $\measuredangle ABC = 90°$. Нека је $S_1$ пресек симетрале $\measuredangle BCA$ са дијагоналом $BD$. Тада важи $\measuredangle S_1CA = \measuredangle S_1DA = 20°$ па је четвороугао $S_1ADC$ тетиван, те се $S_1$ налази на кружници описаној око $\triangle ACD$. На исти начин, ако са $S_2$ означимо пресек симетрале $\measuredangle BAC$ са дијагоналом $BD$, добићемо да је четвороугао $S_2ADC$ тетиван, па се и $S_2$ налази на кругу описаном око $\triangle ACD$. Ово је могуће једино уколико се тачке $S_1$ и $S_2$ поклапају. У тој тачки налази се центар уписане кружнице у $\triangle ABC$, па закључујемо да је дијагонала $BD$ симетрала правог угла $\measuredangle ABC$, тј. $\measuredangle DBC = 45°$. Сада се добија да је угао између дијагонала једнак $85°$.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике.*

## Четврти разред – А категорија

**1.** Јасно да посматрани израз узима само позитивне вредности. Доказаћемо да може узимати све вредности на $(0, \infty)$. Посматрајмо специјалан случај $x = y = t$, $y = \frac{1}{t^2}$, где $t \in (0, \infty)$. Тада овај израз постаје, после лаког сређивања $f(t) = \frac{2t + t^4}{2t^3 + 1}$. Очито $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$, а $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$. Такође очито је и $f(t)$ непрекидна на $(0, \infty)$, па узима све вредности на $(0, \infty)$.

**2.** Одговор: сви бројеви дељиви са 11, и бројеви $1\,909\,090\cdots 9\,090$, $2\,818\,181\cdots 8\,181$, $3\,727\,272\cdots 7\,272$, $4\,636\,363\cdots 6\,363$, $5\,545\,454\cdots 5\,454$, $6\,454\,545\cdots 4\,545$, $7\,363\,636\cdots 3\,636$, $8\,272\,727\cdots 2\,727$ и $9\,181\,818\cdots 1\,818$.

Сви бројеви дељиви са 11 имају тражено својство. Заиста, како је број дељив са 11 акко је разлика збирова цифара на парним, односно непарним позицијама дељива са 11, и како изменом ма које цифре у броју ову разлику повећавамо или смањујемо највише за 9, јасно је да се изменом ма које цифре увек добија број који није дељив са 11.

Нека је, ради једноставнијег записа, $m = 31\,012\,015$, и претпоставимо сада да број $n = \overline{a_{m-1}a_{m-2}\cdots a_1a_0}$, где $11 \nmid n$, има тражено својство. Важи

$$n \equiv \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} a_{2i} - \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1} a_{2i+1} \equiv b \neq 0 \pmod{11}.$$

Уколико би за неко $i$, $0 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1$ важило $a_{2i} \geqslant b$, заменом цифре $a_{2i}$ са $a_{2i} - b$ добили бисмо број дељив са 11, што је немогуће по претпоставци. Исто важи у случају $a_{m-1} > b$. Даље, уколико би за неко $i$, $0 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ важило $a_{2i} \leqslant b - 2$, заменом цифре $a_{2i}$ са $a_{2i} - b + 11$ опет бисмо добили број дељив са 11. Према томе, једине могућности су $a_{2i} = b - 1$ за све $i$, $0 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1$, и $a_{m-1} \in \{b-1, b\}$. Посматрајмо сада цифре на непарним позицијама. Уколико би за неку од њих важило $a_{2i+1} \leqslant 9 - b$, заменом цифре $a_{2i+1}$ са $a_{2i+1} + b$ добили бисмо број дељив са 11. Даље, уколико би за неку од њих важило $a_{2i+1} \geqslant 11 - b$, заменом цифре $a_{2i+1}$ са $a_{2i+1} + b - 11$ добили бисмо број дељив са 11. Према томе, све цифре на непарним позицијама морају износити $10 - b$.

Размотримо могућност $a_{m-1} = b - 1$. Тада имамо

$$n \equiv \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right)(b-1) - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor (10-b) = \underbrace{15\,506\,008}_{\equiv 1 \pmod{11}}(b-1) - \underbrace{15\,506\,007}_{\equiv 0 \pmod{11}}(10-b) \equiv b-1 \pmod{11},$$

што је немогуће јер важи $n \equiv b \pmod{11}$. Према томе, остаје $a_{m-1} = b$. Уврштајући сада све могућности $b = 1, 2, \ldots, 9$ добијамо управо бројеве наведене на почетку.

**3.** Докажимо најпре да се сваки позитиван рационалан број не већи од 1 може приказати као збир неколико различитих рационалних бројева који сви имају бројилац једнак 1. Нека је задат рационалан број $\frac{x}{y}$, где су $x$ и $y$ узајамно прости и важи $x \leqslant y$. Радићемо индукцијом по $x$. Уколико је $x = 1$, нема шта да се доказује. Посматрајмо сада највећи рационалан број с бројиоцем једнаким 1, притом не већи од $\frac{x}{y}$; то је број $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$, и можемо записати

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} + \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}\right) = \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} + \frac{x\lceil \frac{y}{x} \rceil - y}{y\lceil \frac{y}{x} \rceil} = \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} + \frac{(-y) \bmod x}{y\lceil \frac{y}{x} \rceil}.$$

Бројилац разломка $\frac{(-y) \bmod x}{y\lceil \frac{y}{x} \rceil}$ мањи је од $x$, па се, према индуктивној хипотези, овај разломак може даље представити као тражена сума. Како је овај разломак притом строго мањи од $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$ (уколико би важило супротно, имали бисмо $\frac{x}{y} - \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} \geqslant \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$, тј. $\frac{x}{y} \geqslant \frac{2}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} > \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil - 1}$, а ово је у контрадикцији с максималношћу разломка $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$), међу добијеним сабирцима се не јавља $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$, па имамо и тражено представљање разломка $\frac{x}{y}$.

Сада доказујемо да се и рационални бројеви већи од 1 могу представити у облику описаног збира. Нека је задат рационалан број $r$ већи од 1. Пошто важи $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$, можемо одабрати такав број $m \in \mathbb{N}$ за који важи $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} < r$ али $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} > r$. Запишимо

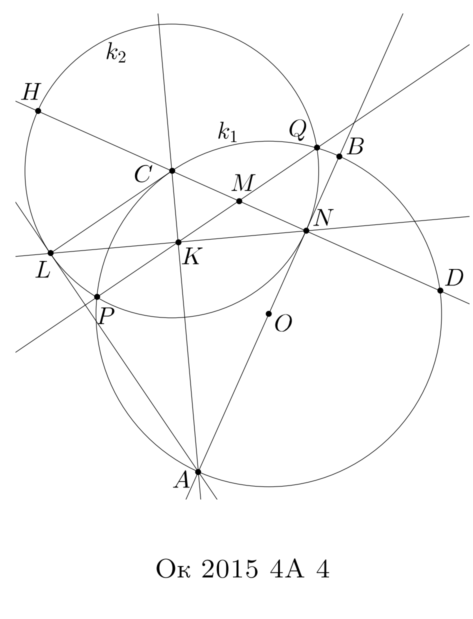
$$r = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + \left(r - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\right).$$

Како важи $r - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} < \frac{1}{m+1} < 1$, број $r - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$ можемо представити у облику суме посматраног облика, и притом ће имениоци свих добијених сабирака бити већи од $m + 1$. Према томе, преко горње једнакости добијамо тражено представљање броја $r$.

Вратимо се сада на постављени задатак. Да бисмо добили на табли број $q$, довољно је да рационалан број $\frac{1}{q}$ представимо у облику суме $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, и потом нам брисање с табле бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ омогућује да уместо њих напишемо управо број $q$ (друга од две могућности дозвољене у поставци даје управо резултат $\frac{1}{\frac{1}{q}} = q$). Тиме је задатак решен. (Приметимо да смо заправо доказали и више него што је тражено: постављени циљ можемо обавити у само једном кораку.)

**4.** Нека права $CN$ поново сече кружницу $k_1$ у тачки $D$ и кружницу $k_2$ у тачки $H$. Тада важи $DN = NC = CH$. Тачка $M$ пресека правих $PQ$ и $CN$ има једнаку потенцију у односу на $k_1$ и $k_2$, па следи $CN^2 - MN^2 = CM \cdot MD = NM \cdot MH = CN^2 - CM^2$, што значи да је $M$ средиште дужи $CN$. Даље, како важи $AK \cdot KC = PK \cdot KQ = NK \cdot KT$, тачке $A, N, C, L$ леже на истој кружници, па добијамо $\measuredangle ALC = \measuredangle ANC = 90°$. Следи да је $AL$ тангента на кружницу $k_2$, па закључујемо да је $ANCL$ делтоид, одакле следи $AC \perp NL$ и $MN = MC = MK$.

Сада имамо $\measuredangle LAK = \measuredangle KNM = \measuredangle NKM = \measuredangle LKP$, па $KP$ лежи на висини троугла $AKL$, тј. $KP \perp AL$.



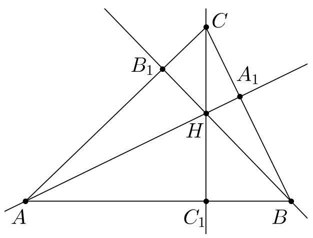

Ок 2015 4А 4

**5.** Такав низ постоји. Дефинисаћемо га рекурзивно на следећи начин: нека је $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{2n+1} = 2a_{2n}$ и $a_{2n+2} = a_{2n+1} + r_n$, где је $r_n$ најмањи природан број који се не може написати у облику $a_i - a_j$ за неке $i, j \leqslant 2n+1$. Из саме конструкције следи да се сваки природан број може представити у облику $a_i - a_j$ за неке $i, j \in \mathbb{N}$. Докажимо још да је овакво представљање јединствено. Претпоставимо супротно: нека је за неке $h, k, l, m$ за које важи $k > h$ и $m > l$ испуњена једнакост $a_k - a_h = a_m - a_l$; без умањења општости, можемо претпоставити још $m > k$. Уколико је $m$ непаран број, рецимо $m = 2n + 1$, тада имамо $a_{2n+1} = a_m = a_l + a_k - a_h < a_l + a_k \leqslant 2a_{m-1} = 2a_{2n} = a_{2n+1}$, контрадикција. Нека је сада $m$ паран број, рецимо $m = 2n + 2$. Уколико важи $l = m - 1 = 2n + 1$, тада имамо $a_m - a_l = a_{2n+2} - a_{2n+1} = r_n$, али тада важи и $r_n = a_k - a_h$ где је притом $h < k \leqslant m - 1 = 2n + 1$, што је у контрадикцији с одабиром $r_n$. Уколико важи $k = 2n + 1$, тада слично као малопре имамо $a_m - a_k = r_n$ или одатле и $r_n = a_l - a_h$ (због $a_m - a_k = a_l - a_h$), контрадикција. Најзад, уколико важи $l < 2n + 1$ и $k < 2n + 1$, тада имамо $a_{2n+2} = a_m = a_l + a_k - a_h < a_l + a_k \leqslant a_{2n} + a_{2n} = a_{2n+1}$, што је опет контрадикција, чиме је доказ завршен.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике.*

## Први разред – Б категорија

**1.** У скупу $A \cap B$ налазе се они елементи који припадају и скупу $A$ и скупу $B$, а такав је само елемент 1, па важи $A \cap B = \{1\}$ (приметити да, рецимо, елемент $\{1\}$ није заједнички за скупове $A$ и $B$, јер он припада скупу $B$ али не и скупу $A$). Слично, према дефиницији уније и разлике скупова, добијамо $A \cup B = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $A \setminus B = \{2\}$ и $B \setminus A = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. (Тангента 73, стр. 33, зад. I.1.)




Ок 2015 1Б 2

**2.** Израчунавамо $\measuredangle B_1HC_1 = 360^\circ - \measuredangle A_1HC_1 - \measuredangle A_1HB_1 = 136^\circ$. Како збир углова четвороугла $AC_1HB_1$ износи $360^\circ$ а његови углови код темена $C_1$ и $B_1$ износе по $90^\circ$, добијамо $\measuredangle BAC = \measuredangle C_1AB_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \measuredangle B_1HC_1 = 44^\circ$. (Тангента 70, стр. 29, зад. I.2.)

**3.** Нека је $a^2$ број који се добија брисањем последње две цифре броја $n$. Дакле, $n = 100a^2 + b = c^2$ (где важи $0 < b < 100$), одакле добијамо $0 < b = c^2 - 100a^2 = (c - 10a)(c + 10a) < 100$. Имамо неједнакости $c > 10a$ и $c + 10a < 100$, па из њих добијамо $100 > c + 10a > 20a$, тј. $a < 5$. Како највећој могућој вредности броја $n$ одговара највећа могућа вредност броја $a$, закључујемо $a = 4$. Знамо да важи $c > 10a = 40$. Уколико би важило $c \geqslant 42$, добили бисмо $b = (c - 10a)(c + 10a) \geqslant 2 \cdot 82 = 164$, контрадикција са $b < 100$. Као једина могућност остаје $c = 41$. Тада имамо $n = 41^2 = 1681$ (и брисањем последње две цифре заиста остаје $16 = 4^2$).

**4.** Пошто важи $6! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, напишимо $x = 2^{a_1}3^{b_1}5^{c_1}$ и $y = 2^{a_2}3^{b_2}5^{c_2}$, где се услов из поставке своди на $\max\{a_1, a_2\} = 4$, $\max\{b_1, b_2\} = 2$ и $\max\{c_1, c_2\} = 1$. Дакле, парови $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ и $(c_1, c_2)$ редом могу да се одаберу на 9, 5 и 3 начина (што директно пребрајамо). Према томе, одговор је $9 \cdot 5 \cdot 3 = 135$.

**5.** Посматрајмо све подскупове бројева записаних на табли, рачунајући и празан скуп. Њих има $2^n$. По Дирихлеовом принципу, постоје бар два од ових подскупова, рецимо $A$ и $B$, такви да сума елемената скупа $A$ и сума елемената скупа $B$ имају исти остатак при дељењу са $2^n - 3$. Испред бројева који се налазе у скупу $A$ а не налазе се у $B$ напишемо знак „+“, испред бројева који се налазе у скупу $B$ а не налазе се у $A$ напишемо знак „−“, а све остале бројеве обришемо с табле. Вредност израза добијеног на тај начин једнака је суми бројева из скупа $A$ умањеној за суму бројева из скупа $B$ (заиста, приметимо да се приликом рачунања разлике ове две суме испотиру они бројеви који се налазе и у скупу $A$ и у скупу $B$, будући да они учествују у обе суме, а тиме нам остаје управо израз добијен на табли); пошто ове суме дају исти остатак при дељењу са $2^n - 3$, њихова разлика дељива је са $2^n - 3$, чиме је доказ завршен.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике. За ученике који се такмиче у категорији Б оваква пракса задржана је и на овом такмичењу, а почев од Државног такмичења неће више бити примењивана.*

## Други разред – Б категорија

**1.** Постављена једначина еквивалентна је са

$$\frac{x - a - 2b}{x - a} = \frac{a^2 - b^2}{(x - a)^2},$$

а ово се даље своди на

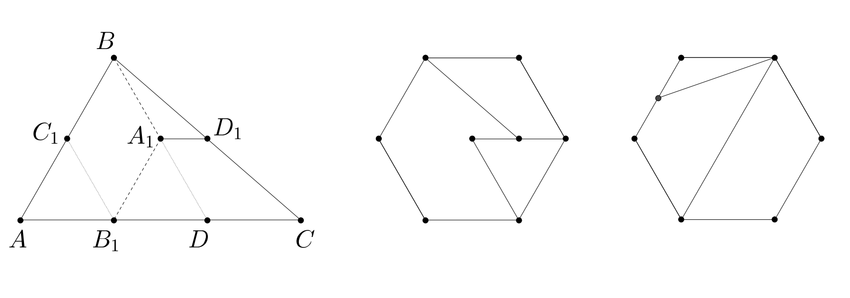
$$0 = \frac{a^2 - b^2}{(x - a)^2} - \frac{x - a - 2b}{x - a} = \frac{a^2 - b^2 - (x - a - 2b)(x - a)}{(x - a)^2}$$

$$= \frac{-b^2 - x^2 + 2ax + 2xb - 2ab}{(x - a)^2} = \frac{2a(x - b) - x(x - b) + b(x - b)}{(x - a)^2} = \frac{(x - b)(-x + 2a + b)}{(x - a)^2}.$$

Према томе, решења су $x = b$ или $x = 2a + b$, уз услов $x \neq a$. (Тангента 70, стр. 29, зад. II.1.)

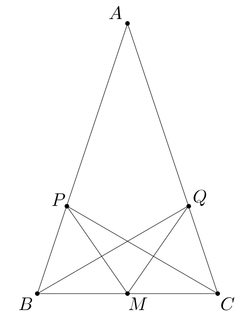
**2.** *Прво решење.* Могуће је. На страници $AC$ уочимо тачку $D$ такву да важи $AD = AB = 2x$. Нека су $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ средишта дужи $BD$, $DA$, $AB$ и $BC$, редом, као на слици лево. Од једнакостраничног $\triangle AC_1B_1$, трапеза $DCD_1A_1$ и неконвексног шестоугла $D_1BC_1B_1DA_1$ можемо саставити правилан шестоугао као на слици у средини.

*Друго решење.* Уочимо исте тачке као у претходном решењу. Од $\triangle A_1BD_1$, трапеза $B_1CD_1A_1$ и трапеза $A_1BAB_1$ можемо саставити правилан шестоугао као на слици десно.




Ок 2015 2Б 2

**3.** За $c = 2$ не постоје одговарајући $a$ и $b$. За $c = 3$ једина могућност је $a = 3$ и $b = 5$ (или обратно), а тада добијамо $ab + 34 = 49$, што јесте сложен број. Претпоставимо сада да важи $c > 3$. Како је $c$ прост број, важи $c = 6k \pm 1$. Тада $6 \mid c^2 - 1 = a + b$. Немогуће је $a = 2$ (јер би тада $b$ био паран, тј. једнак 2, а ово не одговара услову), као ни $a = 3$ (јер би тада и $b$ био дељив са 3, тј. једнак 3, а ни ово не одговара услову). Следи да је један од бројева $a$ и $b$ једнак $6l + 1$ а други $6m - 1$. Тада важи $ab + 34 = (6l + 1)(6m - 1) + 34 = 36lm - 6l + 6m + 33$, тј. збир $ab + 34$ дељив је са 3, па је сложен.




Ок 2015 2Б 4

**4.** Пошто важи $\measuredangle MBP = \measuredangle MCQ$, $\measuredangle BMP = \measuredangle CMQ$ и $BM = CM$, по ставу УСУ следи $\triangle MBP \cong \triangle MCQ$, а одатле добијамо $BP = CQ$. Сада по ставу СУС имамо $\triangle BCQ \cong \triangle CBP$, а одатле следи $BQ = CP$. (Тангента 70, стр. 29, зад. I.4.)

**5.** У наредној таблици приказани су све могуће комбинације како је могуће остварити 30 бодова на овом такмичењу (у сваком реду приказана је по једна могућност у зависности од тога на колико задатака је ученик остварио 5, 4, 3, 2, 1 и 0 бодова).

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | број начина |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | | 1 | 7 |
| 5 | 1 | | | 1 | | $21 \cdot 2 = 42$ |
| 5 | | 1 | 1 | | | $21 \cdot 2 = 42$ |
| 4 | 2 | | 1 | | | $35 \cdot 3 = 105$ |
| 4 | 1 | 2 | | | | $35 \cdot 3 = 105$ |
| 3 | 3 | 1 | | | | $35 \cdot 4 = 140$ |
| 2 | 5 | | | | | 21 |
| | | | укупно: | | | 462 |

Пошто важи $462 < 500$, по Дирихлеовом принципу морају постојати бар 2 ученика са истим распоредом поена по задацима.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике. За ученике који се такмиче у категорији Б оваква пракса задржана је и на овом такмичењу, а почев од Државног такмичења неће више бити примењивана.*

## Трећи разред – Б категорија

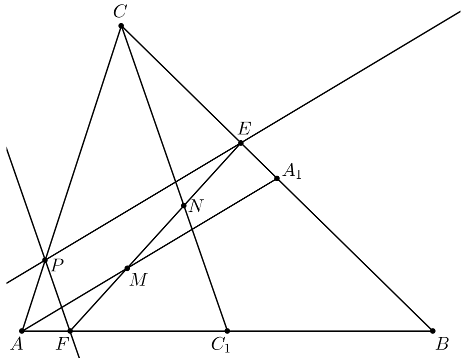
**1.** Запишимо $t = \lfloor t \rfloor + r$, при чему важи $0 \leqslant r < 1$. Уколико важи $r < \frac{1}{3}$, тада имамо $\lfloor t \rfloor = \lfloor t + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor t + \frac{2}{3} \rfloor$, тј. лева страна посматране једнакости износи $3\lfloor t \rfloor$, док десна износи $\lfloor 3(\lfloor t \rfloor + r) \rfloor = \lfloor 3\lfloor t \rfloor + 3r \rfloor = 3\lfloor t \rfloor$ (будући да имамо $0 \leqslant 3r < 1$), па је у овом случају једнакост доказана. Уколико важи $\frac{1}{3} \leqslant r < \frac{2}{3}$, тада имамо $\lfloor t \rfloor = \lfloor t + \frac{1}{3} \rfloor$ и $\lfloor t + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor t \rfloor + 1$, тј. лева страна посматране једнакости износи $3\lfloor t \rfloor + 1$, док десна износи $\lfloor 3(\lfloor t \rfloor + r) \rfloor = \lfloor 3\lfloor t \rfloor + 3r \rfloor = 3\lfloor t \rfloor + 1$ (будући да имамо $1 \leqslant 3r < 2$), па је и у овом случају једнакост доказана. Најзад, уколико важи $\frac{2}{3} \leqslant r < 1$, тада имамо $\lfloor t + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor t + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor t \rfloor + 1$, тј. лева страна посматране једнакости износи $3\lfloor t \rfloor + 2$, док десна износи $\lfloor 3(\lfloor t \rfloor + r) \rfloor = \lfloor 3\lfloor t \rfloor + 3r \rfloor = 3\lfloor t \rfloor + 2$ (будући да имамо $2 \leqslant 3r < 3$), чиме је доказ комплетиран. (Тангента 71, стр. 37, зад. I.4(а).)

**2.** Пошто важи

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2\left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 4x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin 4x,$$

постављена једначина еквивалентна је са $\sin(x + \frac{\pi}{3})\sin 4x = 1$. Како за све $\alpha$ важи $|\sin\alpha| \leqslant 1$, остају само две могућности: i) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ и истовремено $\sin 4x = 1$, или ii) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1$ и истовремено $\sin 4x = -1$. У првом случају добијамо $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и истовремено $x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}$, што очито није могуће. У другом случају добијамо $x = \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$ и истовремено $x = \frac{\pi}{8} + \frac{(2l+1)\pi}{4}$, што очито опет није могуће. Дакле, ова једначина нема решења.

**3.** После броја 2015 у овом низу следи број 221, а после њега 26. Након тога сви наредни чланови овог низа су једнаки 26, јер важи $4 \cdot 6 + 2 = 26$. Дакле, након броја 2015 неће се појавити прост број. Докажимо да су сви чланови низа пре броја 2015 дељиви са 13. Посматрајмо неки број у низу $n$. Нека је $b$ његова цифра јединица, а $a$ број који настаје када броју $n$ избришемо последњу цифру. Тада је после броја $n = 10a + b$ следећи члан низа $m = a + 4b = \frac{10a + 40b}{10} = \frac{n + 39b}{10}$. Уколико $13 \mid m$, тада $13 \mid 10m$, и даље добијамо $13 \mid 10m - 39b = n$. Другим речима, уколико је број $m$ у низу дељив са 13, тада је и његов претходник дељив са 13. Како је 2015 дељиво са 13, добијамо да су и сви претходници дељиви са 13. Остаје једино проверити може ли се број 13 појавити у низу. То је немогуће јер би у том случају следећи члан био $4 \cdot 3 + 1 = 13$, па би и сви наредни чланови били једнаки 13, те се у низу никада не би појавио број 2015. Дакле, сви чланови пре 2015 дељиви су са 13 а нису једнаки 13, па не могу бити прости.




Ок 2015 3Б 4

**4.** Нека је $PC = \lambda AC$, $PA = (1-\lambda)AC$, где важи $0 < \lambda < 1$. Из Талесове теореме добијамо $AF = (1-\lambda)AC_1 = \frac{1-\lambda}{2}AB$ и $CE = \lambda CA_1 = \frac{\lambda}{2}CB$. Уведимо векторе $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}$. Добијамо $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{a} - (1-\frac{\lambda}{2})\overrightarrow{c}$. Даље, нека су $N$ и $M$ пресечне тачке $EF$ са $CC_1$ и $AA_1$, редом. Тада важи $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{EC} + \alpha\overrightarrow{CC_1}$, где је $\alpha$ неки реални коефицијент, а како важи $\overrightarrow{CC_1} = \frac{\overrightarrow{a}}{2} - \overrightarrow{c}$, добијамо $\overrightarrow{EN} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{c} + \alpha(\frac{\overrightarrow{a}}{2} - \overrightarrow{c}) = \frac{\alpha\overrightarrow{a}}{2} - (\alpha - \frac{\lambda}{2})\overrightarrow{c}$. Вектори $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EN}$ су колинеарни, па су им одговарајући коефицијенти уз $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ сразмерни, тј. важи $\frac{1+\lambda}{\alpha} = \frac{2-\lambda}{2\alpha-\lambda} = k$, из чега се добија $3\lambda\alpha = \lambda + \lambda^2$, тј. $\alpha = \frac{1+\lambda}{3}$, а одатле следи $k = 3$, тј. $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{EN}$. Аналогно добијамо $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{FM}$, чиме је тврђење доказано.

**5.** Раздвајамо два случаја: i) највећа цифра је 9 а најмања 1; ii) највећа цифра је 8 а најмања 0. (То су једине две могућности.) У првом случају јединица може доћи на било коју од 6 позиција, а потом деветка на било коју од преосталих 5 позиција. Даље, на прву од преостале четири позиције може доћи било која од цифара $2, 3, \dots, 8$, што је 7 могућности, за наредну позицију имамо 6 могућности, за позицију после ње 5 могућности и за последњу преосталу позицију 4 могућности. Тиме смо набројали укупно $6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 25\,200$ бројева у првом случају. Посматрајмо сада други случај. Постоји 5 могућих позиција на којима се може наћи нула (јер нула не може бити водећа цифра), а након постављања нуле имамо 5 могућих позиција за осмицу. Даље резонујемо слично као у претходном случају, и израчунавамо да у овом случају имамо укупно $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 21\,000$ бројева. Дакле, решење задатка је $25\,200 + 21\,000 = 46\,200$ бројева. (Тангента 72, стр. 33, зад. 13.)

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике. За ученике који се такмиче у категорији Б оваква пракса задржана је и на овом такмичењу, а почев од Државног такмичења неће више бити примењивана.*

## Четврти разред – Б категорија

**1.** Посматрана једнакост еквивалентна је са $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2015}$. Из неједнакости аритметичке и хармонијске средине за бројеве $xy$, $yz$ и $zx$ имамо

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{zy}} = \frac{3}{\frac{1}{2015}} = 6045,$$

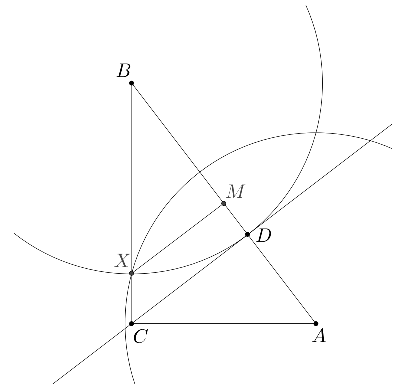
тј. $xy + yz + zx \geqslant 18\,135$. Минимум се достиже за $xz = xy = yz = 6045$, тј. за $x = y = z = \sqrt{6045}$.

**2.** Пошто важи $375 = 3 \cdot 125$, следи да је $n$ дељив са 375 ако и само ако је дељив са 3 и са 125. Да би број био дељив са 125, потребно је и довољно да му троцифрени завршетак буде дељив са 125; према томе, $\overline{a_7a_8a_9} \in \{125, 375, 625, 875\}$. Прве две могућности отпадају јер није испуњен услов $a_7 \geqslant a_8$, па остају последње две. Размотримо прво случај $\overline{a_7a_8a_9} = 875$. Једине могућности за $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ такве да буде испуњен услов $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_8$ јесу 88888, 98888, 99888, 99988, 99998 и 99999, тј. шест могућности. Преостаје још да пребројимо на колико начина можемо одабрати цифру $a_1$. У зависности од остатка који збир $a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ даје при дељењу са 3, за цифру $a_1$ можемо изабрати неку од цифара из скупа $\{3, 6, 9\}$, односно $\{2, 5, 8\}$, односно $\{1, 4, 7\}$ (цифру $a_1$ бирамо тако да збир свих цифара добијеног броја буде дељив са 3); дакле, увек имамо избор између тачно три могућности за цифру $a_1$, па можемо закључити да у случају $\overline{a_7a_8a_9} = 875$ имамо $6 \cdot 3 = 18$ могућих вредности за $n$.

Посматрајмо сада случај $\overline{a_7a_8a_9} = 625$. Пребројмо колико постоји могућности за $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$. Свака од ових пет цифара јесте једна од цифара 6, 7, 8 или 9. Приметимо да било какав одабир укупно пет од ових цифара једнозначно одређује $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$, будући да је поредак задат. Користећи ово запажање, сада рачунамо: уколико бирамо само једну цифру пет пута, ту имамо 4 могућности; уколико бирамо две цифре, њих можемо изабрати на 6 начина, а оне могу бити расподељене на 4 начина ($1+4$, $2+3$, $3+2$ и $4+1$), што даје $6 \cdot 4 = 24$ могућности; уколико бирамо три цифре, њих можемо изабрати на 4 начина, а оне могу бити расподељене на 6 начина ($1+1+3$, $1+3+1$, $3+1+1$, $1+2+2$, $1+2+1$ и $2+1+1$), што даје $4 \cdot 6 = 24$ могућности; најзад, уколико све четири цифре буду узете, оне могу бити расподељене на 4 начина (једна ће бити узета два пута а остале по једном). Тиме смо набројали 56 могућности за $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$. Као и раније, за сваку од њих цифра $a_1$ може бити одабрана на тачно 3 начина. Према томе, у овом случају имамо укупно $56 \cdot 3 = 168$ могућих вредности за $n$, те је решење задатка $18 + 168 = 186$. (Тангента 72, стр. 36, зад. II.18.)

**3.** Означимо са $M$ средиште дужи $AB$, а са $X$ пресечну тачку посматраних кружница. Тада је $\triangle BMX$ правоугли ($XM \perp AB$ јер је заједничка тетива кружница које се секу нормална на дуж која спаја њихове центре) и важи $\triangle BMX \sim \triangle BCA$, одакле добијамо $\frac{AB}{BC} = \frac{BX}{BM} = 2\frac{BD}{AB}$, тј. $AB^2 = 2BC \cdot BD = 2BC \cdot \frac{BC^2}{AB}$ (последња једнакост лако следи из $\triangle BDC \sim \triangle BCA$), а одавде добијамо $\frac{AB^3}{BC^3} = 2$, тј. $\frac{AB}{BC} = \sqrt[3]{2}$. Из $\triangle BDC \sim \triangle BCA$ коначно добијамо $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

**4.** Нека је уочен ваљак полупречника основице $r$ и висине $h$, чија је запремина једнака задатој константи $V$. Из једнакости $V = r^2\pi h$ добијамо $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Површина овог ваљка износи $2r^2\pi + 2r\pi h = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$. Посматрајмо овај израз као функцију по $r$ и потражимо први извод. Први извод износи $4r\pi - \frac{2V}{r^2}$. Први извод једнак је нули када важи $2r^3\pi = V$, позитиван је када важи $2r^3\pi > V$ а негативан када важи $2r^3\pi < V$. Дакле, посматрана површина је минимална када важи $2r^3\pi = V$, и тада имамо $h = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{2r^3\pi}{r^2\pi} = 2r$, што је и требало доказати. (Тангента 70, стр. 32, зад. IV.3.)




Ок 2015 4Б 3

**5.** Прво ћемо показати да се у броју $(2^n)!$ прост чинилац 2 појављује на степен $2^n - 1$. И заиста, међу свим бројевима од 1 до $2^n$ бројева дељивих са 2 има $2^{n-1}$, бројева дељивих са 4 има $2^{n-2}$, …, дељивих са $2^n$ има 1. Према томе, у броју $(2^n)!$ прост чинилац 2 појављује се на степен $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$, што смо и тврдили. Одатле сада следи да се у броју $(2^n - 1)!$ прост чинилац 2 појављује на степен $2^n - 1 - n$. Према томе, уколико узмемо $k = 2^n - 1$ где је $n$ произвољан број већи од 2015, тада се у броју $k! = (2^n - 1)!$ прост чинилац 2 појављује на степен $2^n - 1 - n = k - n$, а пошто важи $k - n < k - 2015$, добијамо $2^{k-2015} \nmid k!$.

*Обавештење: свим ученицима и професорима напомињемо да није више актуелна пракса о одређеном броју задатака из часописа „Тангента“ на домаћим средњошколским такмичењима из математике. За ученике који се такмиче у категорији Б оваква пракса задржана је и на овом такмичењу, а почев од Државног такмичења неће више бити примењивана.*