Субота, 11. јул 2015.

4. задатак. Нека је ABC оштроугли троугао са ортоцентром H. Тачка D је таква да је четвороугао $HABD$ паралелограм ($AB \parallel HD$ и $AH \parallel BD$). Тачка E на правој DH је таква да права AC пролази кроз средиште дужи HE. Нека је F друга тачка пресека праве AC и описане кружнице троугла DCE.

Доказати да је $EF = AH$. *(Аустралија)*

5. задатак. Низ позитивних реалних бројева $a_1, a_2, \ldots$ задовољава услов

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

за сваки природан број k. Доказати да важи

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$$

за свако $n \geqslant 2$. *(Србија)*

6. задатак. Дат је подскуп $\mathcal{A}$ скупа природних бројева. Природан број n зовемо *посебним* ако постоји тачно један подскуп $\mathcal{B}$ скупа $\mathcal{A}$ са следећим својствима:

(i) број елемената скупа $\mathcal{B}$ је непаран;

(ii) збир елемената скупа $\mathcal{B}$ је једнак n.

Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који нису посебни.

(*Ако је m једини елемент скупа $\mathcal{B}$, онда је збир елемената скупа $\mathcal{B}$ једнак m.*) *(САД)*