32. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Атина, Грчка – 5. мај 2015.

1. Ако су a, b и c позитивни бројеви, доказати неједнакост

$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geqslant abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3).$$

(Црна Гора)

2. Дат је неједнакокраки троугао ABC са описаним кругом ω и центром уписаног круга I. Праве AI, BI и CI редом секу круг ω у тачкама D, E, F различитим од A, B, C. Праве кроз тачку I паралелне правим BC, CA и AB редом секу праве EF, FD и DE у тачкама K, L и M. Доказати да су тачке K, L и M колинеарне.

(Кипар)

3. Комисија састављена од 3366 филмских критичара гласа за Оскара. Сваки критичар гласа за једног глумца и једну глумицу. Након гласања се испоставило да за сваки природан број n не већи од 100 постоји глумац или глумица који је добио/ла тачно n гласова. Доказати да постоје двоје критичара који су гласали за истог глумца и исту глумицу. *(Кипар)*

4. Доказати да међу произвољних 20 узастопних природних бројева постоји број d такав да неједнакост

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2}$$

важи за све природне бројеве n.

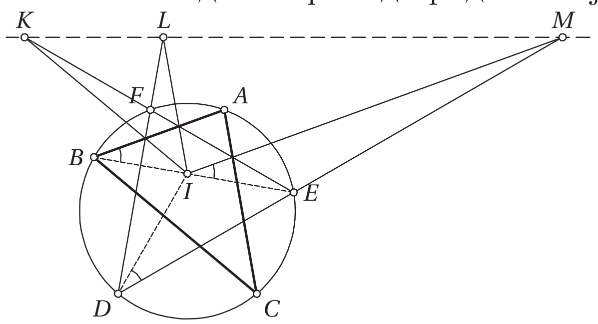
Као и обично, $\{x\}$ означава разломљени део реалног броја x, тј. разлику између x и највећег целог броја мањег или једнаког x. *(Србија)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Сменом $x = ab^2$, $y = bc^2$ и $z = ca^2$ тражена неједнакост се одмах своди на Шурову неједнакост:
$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x.$$

2. Претпостављајући распоред $D-E-M$, имамо $\sphericalangle EIM = \sphericalangle EBA = \sphericalangle EDI$, па је права IM тангента на круг DEI и $MI^2 = MD \cdot ME$. То значи да M припада радикалној оси s описаног круга троугла ABC и дегенерисаног круга $(I,0)$. Аналогно и тачке K и L припадају правој s.



Друго решење. Тачке $K' = BC \cap EF$, $L' = CA \cap FD$ и $M' = AB \cap DE$ су колинеарне на основу Дезаргове теореме, па је у оријентисаним дужима $\frac{EK'}{K'F} \cdot \frac{FL'}{L'D} \cdot \frac{DM'}{M'E} = -1$. Како је $\frac{EK'}{K'F} = \frac{EK}{KF} \cdot \frac{EK'}{EK} \cdot \frac{KF}{K'F} = \frac{EK}{KF} \cdot \frac{BE}{IE} \cdot \frac{IF}{CF}$, заменом ове и аналогних једнакости у претходну релацију добијамо $\frac{EK}{KF} \cdot \frac{FL}{LD} \cdot \frac{DM}{ME} = -1$, па тврђење задатка следи по Менелајевој теореми.

Напомена. Ни у једном решењу се не користи да је I центар уписаног круга.

3. Претпоставимо супротно. За свако $i = 1, \dots, 100$ фиксираћемо једног кандидата A_i који је добио i гласова.

Број судија које су гласале оба пута за неког од кандидата из скупа $\mathscr{A} = \{A_{34}, A_{35}, \dots, A_{100}\}$ није већи од броја парова глумац-глумица међу овим кандидатима, а он је највише $33 \cdot 34 = 1122$.

С друге стране, од укупно $2 \cdot 3366 = 6732$ гласова које су судије доделиле, њих $34 + 35 + \cdots + 100 = 4489$ је отишло кандидатима из скупа $\mathscr{A}$. Зато има највише $6732 - 4489 = 2243$ судија које нису оба пута гласале за кандидате из $\mathscr{A}$.

Дакле, укупан број судија не прелази $1122 + 2243 = 3365$, што је контрадикција.

4. Како за $m = \left[n\sqrt{d}\right]$ важи
$$n\sqrt{d}\left\{n\sqrt{d}\right\} = n\sqrt{d}\left(n\sqrt{d} - m\right) = n\sqrt{d} \cdot \frac{dn^2 - m^2}{n\sqrt{d} + m} > n\sqrt{d} \cdot \frac{dn^2 - m^2}{2n\sqrt{d}} = \frac{dn^2 - m^2}{2},$$
довољно је одабрати d тако да за све $m, n \in \mathbb{N}$ важи $dn^2 - m^2 \not\in \{1,2,3,4\}$. Ово постижемо избором $d = 20k + 15 = 5(4k+3)$ за $k \in \mathbb{N}_0$. Заиста, тада m^2+2 и m^2+3 нису дељиви са 5, док m^2+1 и m^2+4 немају делиоце облика $4k+3$, тако да ниједан од бројева m^2+1, m^2+2, m^2+3 и m^2+4 не може бити дељив са d.