

# 10<sup>th</sup> International Zhautykov Olympiad in Mathematics

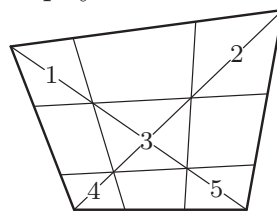
Almaty, January 12-18, 2014

Први дан – 14.1.2014.

1. На страницама  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  троугла  $ABC$  дате су тачке  $M$ ,  $N$  и  $K$  редом, различите од темена троугла. Троугао  $MNK$  зовемо *лепим* ако је  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle KMN$  и  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle KNM$ . Ако у троуглу  $ABC$  постоје два лепа троугла са заједничким теменом, доказати да је троугао  $ABC$  правоугли.
2. Да ли постоји функција  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  која задовољава следећа два услова:
  - за свако  $y \in \mathbb{R}$  постоји  $x \in \mathbb{R}$  такво да је  $f(x) = y$ , и
  - $f(f(x)) = (x - 1)f(x) + 2$  за све  $x \in \mathbb{R}$ ?
3. Дато је 100 различитих природних бројева. Пар бројева зовемо *добрим* ако је један већи од другог 2 или 3 пута. Колико највише добрих парова може да постоји међу тих 100 бројева?  
(Један број се може налазити у више парова.)

Други дан – 15.1.2014.

4. Да ли постоји полином  $P(x)$  са целим коефицијентима такав да је
$$P(1 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad P(3 + \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5}?$$
5. Нека је  $U = \{1, 2, \dots, 2014\}$ . За  $a, b, c \in \mathbb{N}$  означимо са  $f(a, b, c)$  број уређених шесторки скупова  $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$  са следећим својствима:
  - (i)  $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$  и  $|X_1| = a$ ;
  - (ii)  $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$  и  $|X_2| = b$ ;
  - (iii)  $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$  и  $|X_3| = c$ .Доказати да се  $f(a, b, c)$  не мења при пермутовању  $a$ ,  $b$  и  $c$ .  
( $|A|$  означава број елемената скупа  $A$ .)
6. Конвексан четвороугао је подељен на девет четвороуглова помоћу четири дужи као на слици, при чему тачке пресека тих дужи леже на дијагоналама полазног четвороугла. Ако су четвороуглови 1, 2, 3 и 4 тангентни, доказати да је и четвороугао 5 тангентан.



Време за рад: 270 минута сваког дана.

Сваки задатак вреди 7 поена.