35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 16.2.2014.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena

---

poeni	zadatak	
3	1.	Dato je 100 realnih brojeva. Svaki broj je povećan za 1. Ispostavilo se da je suma kvadrata svih brojeva ostala nepromenjena. Odrediti kako će se suma kvadrata promeniti, ako još jednom svaki broj povećamo za 1.
4	2.	Oljina mama je ispekla 15 pitica: 7 sa kupusom, 7 sa mesom i jednu sa višnjama, a nakon toga ih je poređala u krug, baš u tom redosledu, u smeru kretanja kazaljki na satu. Olja želi da pojede piticu sa višnjama. Sve pitice izgledaju identično i Olja ne zna koja je sa višnjama, ali zna da su pitice poređane u navedenom redosledu. Da li Olja može da pojede piticu sa višnjama ako joj je dozvoljeno da proba najviše 3 od ostalih pitica?
4	3.	Polja tablice dimenzije 7×5 popunjena su brojevima. Petar ne zna koji je broj na kom polju, ali zna da je suma brojeva u svakom pravougaoniku dimenzije 2×3 (i 3×2) jednaka 0. Ukoliko ga zanima koji je broj na nekom konkretnom polju, Petar tu informaciju plaća 100 dinara. Koji je najmanji broj dinara potreban Petru da bi saznao kolika je ukupna suma brojeva na svim poljima tablice?
5	4.	Na stranici BC trougla ABC uočena je tačka L takva da je $AL = 2 \cdot CM$, pri čemu je M sredina stranice AB. Ukoliko je $\angle ALC = 45^o$, dokazati da je $AL \perp CM$.
6	5.	Ali Baba i 40 razbojnika žele da pređu preko Bosforskog moreuza. Oni su se poređali u vrstu: Ali Baba na čelu vrste, a za njim 40 razbojnika. Ali Baba je u prijateljskim odnosima sa svojim susedom i sa razbojnikom koji stoji pored njegovog suseda; svaki drugi čovek iz vrste je u prijateljskim odnosima jedino sa ljudima koji stoje pored njega. Za prelazak preko moreuza, oni imaju samo jedan čamac koji može da preveze 2 ili 3 čoveka odjednom (nije dozvoljeno da se samo jedan čovek vozi u čamcu, niti više od 3 čoveka). Takođe, svi ljudi u čamcu moraju da budu međusobno u prijateljskim odnosima. Da li Ali Baba i 40 razbojnika sigurno mogu da pređu preko moreuza?

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA
Osnovna prolećna varijanta, 16.2.2014.
Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)
Izrada zadataka traje 5 sati
Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena

---

poeni	zadatak
4	1. Džeki ima 36 kamenčića čije su mase 1 gram, 2 grama, ..., 36 grama. Čen ima super-lepak takav da je jedna njegova kap dovoljna da spoji dva kamenčića u jedan (sa dve kapi lepka je moguće spojiti tri kamenčića u jedan itd). Čen želi da spoji neke kamenčiće tako da u novonastalom skupu kamenčića Džeki neće moći da izabere jedan ili više njih sa ukupnom masom od tačno 37 grama. Odrediti koliko je najmanje kapi lepka potrebno da bi Čen ispunio svoj cilj.
4	2. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ su međusobno normalne. Neka su M i N tačke na stranicama AD i CD, redom, takve da su uglovi $\angle ABN$ i $\angle CBM$ pravi. Dokazati da je AC paralelno sa MN.
5	3. Ali Baba i 40 razbojnika žele da pređu preko Bosforskog moreuza. Oni su se poređali u vrstu: Ali Baba na čelu vrste, a za njim 40 razbojnika. Ali Baba je u prijateljskim odnosima sa svojim susedom i sa razbojnikom koji stoji pored njegovog suseda; svaki drugi čovek iz vrste je u prijateljskim odnosima jedino sa ljudima koji stoje pored njega. Za prelazak preko moreuza, oni imaju samo jedan čamac koji može da preveze 2 ili 3 čoveka odjednom (nije dozvoljeno da se samo jedan čovek vozi u čamcu, niti više od 3 čoveka). Takođe, svi ljudi u čamcu moraju da budu međusobno u prijateljskim odnosima. Da li Ali Baba i 40 razbojnika sigurno mogu da pređu preko moreuza?
5	4. Prirodni brojevi a, b, c i d su uzajamno prosti po parovima i važi $$ab + cd = ac - 10bd.$$ Dokazati da među njima postoje tri broja tako da je jedan od njih jednak sumi preostala dva.
5	5. Tri šetača – Miške, Marko i Nikola se šetaju po stranicama i dijagonalama konveksnog četvorougla $ABCD$. Miške počinje u temenu A i šeta se maršutom $AB - BC - CD$. Marko se šeta duž dijagonale AC; on kreće iz A u isto vreme kad i Miške i stiže u C u isto vreme kad i Miške. Nikola se šeta duž dijagonale BD; on kreće iz B u isto vreme kada Miške prolazi kroz B i stiže u D u isto vreme kad i Miške. Da li se može destiti da se Marko i Nikola nađu u istom trenutku u preseku dijagonala AC i BD? Brzine svih šetača su konstantne.

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Napredna prolećna varijanta, 1.3.2014.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je student osvojio najveći broj poena

---

points	problems
3	1. Deda Mraz je deci podelio 47 čokoladica i 74 štrudlica. Svaka devojčica dobila je za jednu više čokoladicu od svakog dečaka, a svaki dečak dobio je za jednu više štrudlicu od svake devojčice. Koliko je dece bilo?
5	2. Petar želi da obeleži neka polja table 5×5 tako da Vasa nije u mogućnosti da na tu tablu postavi nekoliko figurica u obliku slova L sastavljenih od 3 kvadratića, tako da su sva obeležena polja pokrivena postavljenim figuricama, kao i da se nikoje dve figurice ne preklapaju, niti neka figurica viri sa table. Koji je najmanji broj polja koji Petar treba da obeleži da bi u ovome uspeo?
6	3. Na kvadratni sto stavljena je kvadratna krpa, ne obavezno iste veličine, tako da na krpi nema prevoja i nabora. Svi uglovi stola ostali su nepokriveni, a svi delovi krpe koji vise sa stola su trougaoni. Poznato je da su dva susedna viseća dela podudarna. Dokazati da su i druga dva viseća dela podudarna.
7	4. Kralj je pozvao dva čarobnjaka i rekao im je sledeće: "Prvi će zapisati 100 ne obavezno različitih prirodnih brojeva, a drugom će biti zadatak da pogodi koji su brojevi zapisani (ako ima jednakih, onda mora pogoditi za svaki broj koliko je puta zapisan). Prvi čarobnjak može da pomogne drugom čarobnjaku na sledeći način. On može da sastavi listu međusobno različitih prirodnih brojeva takvu da je svaki broj sa te liste ili jednak nekom zapisanom broju, ili jednak sumi nekih zapisanih brojeva. Drugi čarobnjak ne sme da zna koji su od brojeva sa liste jednaki zapisanom broju a koji su suma zapisanih brojeva, ali na osnovu te liste treba da pogodi koji su brojevi zapisani. Bilo kakvog dodatnog dogovora među vama ne sme da bude. Ako u tome ne uspete, pogubiću vas, a ako uspete, za svaki broj sa liste otkinuću vam po jednu dlaku sa brade". Odrediti najmanji broj dlaka koje čarobnjaci moraju da izgube po ceni da ostanu živi.
7	5. U ravni je dato nekoliko belih i nekoliko crnih tačaka i između svake dve tačke različitih boja konstruisana je duž. Svakoj duži dodeljen je jedan prirodan broj. Ispostavilo se da ako krenemo od jedne tačke i krećemo se po dužima tako da se nakon nekoliko koraka vratimo u tu tačku, proizvod brojeva pridruženih dužima po kojima se krećemo kada idemo od bele tačke do crne, jednak je proizvodu brojeva pridruženih dužima po kojima se krećemo kada idemo od crne tačke do bele. Da li odatle sledi da je moguće svakoj tački pridružiti po jedan prirodan broj tako da je broj pridružen svakoj duži jednak proizvodu brojeva pridruženih njenim temenima?
9	6. Kocka $3 \times 3 \times 3$ sastavljena je od kockica $1 \times 1 \times 1$. Koji je najveći broj kockica $1 \times 1 \times 1$ koje možemo ukloniti, tako da preostalo telo zadovoljava: 1) Projekcija tela na ravan svake strane prvobitne kocke je kvadrat 3×3; 2) Od bilo koje kockice možemo doći do bilo koje druge kockice prelazeći iz kockice u njoj susednu kockicu (susedne kockice su one koje dele jednu stranu)?
9	7. Na kružnici u smeru kretanja kazaljki na satu date su tačke $A_1, A_2, ..., A_{10}$, koje se mogu podeliti u 5 parova dijametralno suprotnih tačaka. U početku se u svakoj tački nalazi po jedan skakavac. Svakog minuta, jedan skakavac preskače jednog od svojih suseda i dolazi u tačku na kružnici tako da se rastojanje između njega i preskočenog skakavca nije promenilo. Pri tome, nije dozvoljeno preskočiti bilo kog drugog skakavca, niti doći u već okupiranu tačku. Nakon nekog trenutka, u tačkama $A_1, A_2, ..., A_9$ nalazio se po jedan skakavac, a deseti je bio na luku $A_9A_{10}A_1$. Da li odatle sledi da je taj skakavac obavezno bio u tački A_{10}?

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Napredna prolećna varijanta, 1.3.2014.
Stariji uzrast (2. 3. i 4. razred srednjih škola)
Izrada zadataka traje 5 sati
Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je student osvojio najveći broj poena

---

points problems

1. Maša je napisala nekoliko jedinica i između njih dopisala znake + i $\cdot$, kao i neke zagrade i
3 kao rezultat dobila 2014. Miška je sve znake + zamenio sa $\cdot$, a znake $\cdot$ zamenio je znakom + i takođe dobio 2014. Da li je ovo moguće?

2. Da li je tačno da se svaki konveksan poligon može podeliti pravom na dva poligona jednakih obima i jednakih
4 a) najdužih stranica?
4 b) najkraćih stranice?

3. Kralj je pozvao dva čarobnjaka i rekao im je sledeće: "Prvi će zapisati 100 ne obavezno različitih pozitivnih realnih brojeva, a drugom će biti zadatak da pogodi koji su brojevi zapisani (ako ima jednakih, onda mora pogoditi za svaki broj koliko je puta zapisan). Prvi čarobnjak može da pomogne drugom čarobnjaku na sledeći način. On može da sastavi listu međusobno različitih realnih brojeva takvu da je svaki broj sa te liste ili jednak nekom
6 zapisanom broju, ili jednak sumi nekih zapisanih brojeva. Drugi čarobnjak ne sme da zna koji su od brojeva sa liste jednaki zapisanom broju a koji su suma zapisanih brojeva, ali na osnovu te liste treba da pogodi koji su brojevi zapisani. Bilo kakvog dodatnog dogovora među vama ne sme da bude. Ako u tome ne uspete, pogubiću vas, a ako uspete, za svaki broj sa liste otkinuću vam po jednu dlaku sa brade". Odrediti najmanji broj dlaka koje čarobnjaci moraju da izgube po ceni da ostanu živi.

4. U koordinatnoj ravni obeležene su sve tačke sa celobrojnim koordinatama (x, y) takvim da
7 je $0 \leq y \leq 10$. Koliko najviše obeleženih tačaka može istovremeno pripadati grafiku jednog polinoma 20-tog stepena sa celobrojnim koeficijentima.

5. Dat je nejednakokraki trougao. Petar i Vasa igraju sledeću igru: u jednom potezu prvo Petar odabere jednu tačku u ravni, a Vasa odabere da li će obojiti tu tačku u crveno ili
8 plavo. Petar pobeđuje ako se može naći trougao sličan onom datom i takav da su mu sva tri temena obojena istom bojom. Pronaći minimalan broj poteza potreban Petru da bi pobedio, bez obzira na početni trougao i Vasinu igru.

6. U nekoj zemlji svakom gradu je dodeljen po jedan broj, tako da su svi dodeljeni brojevi međusobno različiti. Za svaka dva od dodeljenih brojeva, zapisano je da li su gradovi sa tim brojevima povezani direktnom avionskom linijom, ili nisu. Poznato je da za bilo koja dva dodeljena broja M i N, moguće je izvršiti drugačije dodeljivanje brojeva gradovima,
9 tako da se gradu kome je bio dodeljen broj M sada dodeli broj N, a da zapis među kojim "brojevima" postoji direktna avionska linija i dalje ostane potpuno tačan.
Da li odatle sledi da je za svaka dva dodeljena broja M i N moguće drugačije dodeliti brojeve gradovima, tako da grad koji je imao broj N sada ima broj M i da grad koji je imao broj M sada ima broj N, a da zapis među kojim "brojevima" postoje linije i dalje bude tačan?

7. Dat je polinom $P(x)$ takav da je

10 $$P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x), \text{ gde je } Q(x) \text{ takođe polinom.}$$

Dokazati da je u polinomu $(P(x) + 1)^{100}$ koeficijent uz x^{99} jednak nuli.