Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

8. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. април 2014.

Први дан

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f\big(xf(y) - yf(x)\big) = f(xy) - xy.$$

(Душан Ђукић)

2. На страницама BC и AC троугла ABC дате су тачке D и E, редом. Нека је F ($F \neq C$) тачка пресека кружнице описане око троугла CED и праве која садржи тачку C и паралелна је са правом AB. Нека је G тачка пресека праве FD и странице AB, а H тачка на правој AB таква да је $\sphericalangle HDA = \sphericalangle GEB$ и $H - A - B$. Ако је $DG = EH$, доказати да тачка пресека дужи AD и BE припада симетрали угла ACB. *(Милош Милосављевић)*

3. Два играча играју следећу игру. Играчи наизменично записују по један природан број већи од један, при чему није дозвољено записати линеарну комбинацију претходно записаних бројева са ненегативним целим коефицијентима. Игру губи играч који не може да запише нови број. Да ли неко од играча има победничку стратегију и, ако има, који? *(Александар Илић / "Квант")*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

8. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. април 2014.

Други дан

4. За природан број n кажемо да је *шашав* ако и само ако постоје природни бројеви $a > 1$ и $b > 1$ такви да је $n = a^b + b$. Да ли постоји 2014 узастопних природних бројева међу којима је тачно 2012 шашавих бројева? *(Милош Милосављевић)*

5. Правилан n-тоугао подељен је на троуглове помоћу $n - 3$ дијагонале од којих никоје две немају заједничких унутрашњих тачака. Колико највише међу овим троугловима може бити међусобно неподударних? *(Душан Ђукић)*

6. Симетрале унутрашњих углова код темена A и B троугла ABC секу наспрамне странице у тачкама D и E, редом. Ромб је уписан у четвороугао $ABDE$ тако да се на свакој страници четвороугла налази тачно једно теме ромба. Ако је $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$, доказати да је барем један угао ромба не већи од $\max\{\alpha, \beta\}$. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

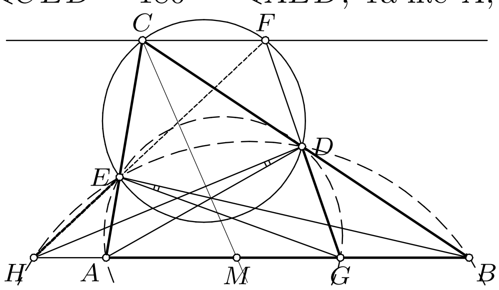
РЕШЕЊА

1. Замена $y = 0$ даје $f(xf(0)) = f(0)$. Ако је $f(0) \neq 0$, израз $xf(0)$ узима све реалне вредности, па је f константна функција, а она не задовољава услове. Према томе, $f(0) = 0$.

Стављањем $y = x$ добијамо $f(0) = f(x^2) - x^2$, тј. $f(x^2) = x^2$. Дакле, $f(x) = x$ за све $x \geqslant 0$. Убацимо сада произвољне $x, y < 0$. Како је тада $f(xy) = xy$, имамо $f(xf(y) - yf(x)) = 0$, што може да важи само за $xf(y) - yf(x) \leqslant 0$. Аналогно је и $yf(x) - xf(y) \leqslant 0$, па је $yf(x) = xf(y)$, тј. $f(x)/x = f(y)/y$. Следи да је $f(x) = cx$ за све $x < 0$, где је c нека константа. Сада за $x < 0 < y$ добијамо $f((1-c)xy) = f(xy) - xy = (c-1)xy$, тј. $f(z) = -z$ за $z = (1-c)xy$. Ако је $c = 1$, онда је $f(x) \equiv x$, што је очигледно решење. С друге стране, за $c \neq 1$ је $z \neq 0$ и отуда $f(z) \in \{cz, z\}$, па тада мора бити $c = -1$, што даје функцију $f(x) = |x|$ за све x. И ова функција је решење: све случајеве осим $x > 0 > y$ смо већ проверили, а за $x > 0 > y$ је $-2xy = f(-2xy) = f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy = -2xy$.

Према томе, решења су функције $f(x) = x$ и $f(x) = |x|$.

2. Како је $\sphericalangle AGD = 180^\circ - \sphericalangle CFD = \sphericalangle CED = 180^\circ - \sphericalangle AED$, тачке A, E, D, G су концикличне. Одавде је $\sphericalangle DAG = \sphericalangle DEG$. Међутим, тада је $\sphericalangle DHB = \sphericalangle DAG - \sphericalangle HDA = \sphericalangle DEG - \sphericalangle BEG = \sphericalangle DEB$, па су и тачке H, E, D, B концикличне. Следи да је $BHE = 180^\circ - \sphericalangle BDE = \sphericalangle CDE = \sphericalangle CFE$, што значи да су тачке F, E и H колинеарне.



Сада је $EH = EF \cdot \frac{AE}{EC}$ и $DG = DF \cdot \frac{DB}{CD}$, па услов $EH = DG$ постаје $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{DF}{EF}$. С друге стране, из $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DCF = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ACB$ следи да је $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, па је $\frac{DF}{EF} = \frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MB}$, где је M пресечна тачка симетрале угла ACB и странице AB. Према томе, $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$, па се по Чевиној теореми праве AD и BE секу на CM.

3. За $a, b \in \mathbb{N}$ дефинишимо $\mathcal{L}\{a, b\} = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$. Прво ћемо доказати једно помоћно тврђење.

Лема. Нека су $a > 1$ и $b > 1$ узајамно прости природни бројеви.

(а) $N = ab - a - b$ је највећи природан број ван скупа $\mathcal{L}\{a, b\}$.

(б) За свако $z \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathcal{L}\{a, b\}$ ако и само ако $N - z \notin \mathcal{L}\{a, b\}$.

Доказ. (а) Ако је $N = (b-1)a - b = ax + by$ за неке $x \in \{0, \dots, b-1\}$ и $y \in \mathbb{Z}$, онда је $x \equiv b-1 \pmod{b}$, па је $x \geqslant b-1$ и одатле $y < 0$; дакле, $N \notin \mathcal{L}\{a, b\}$.

(б) Јасно је да из $z \in \mathcal{L}\{a, b\}$ следи $N - z \notin \mathcal{L}\{a, b\}$ (у супротном би важило $N = z + (N - z) \in \mathcal{L}\{a, b\}$). Посматрајмо сада неко $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{L}\{a, b\}$. Ако је $x \in \{0, \dots, b-1\}$ такво да је $ax \equiv z \pmod{b}$, онда је $z < ax$, тј. $ax - by = z$ за неко $y \in \mathbb{N}$. Тада је $N - x = (b - 1 - x)a + b(y - 1) \in \mathcal{L}\{a, b\}$. □

Нека играч А започне игру уписујући прост број $a \geqslant 5$, након чега играч Б уписује природан број b такав да $a \nmid b$. Само коначно много природних бројева не припада скупу $\mathcal{L}\{a, b\}$, па је игра коначна. Дакле, један од играча има победничку стратегију.

Размотримо игру у којој је други потез играча А број N. Ако је то губитнички потез, сада Б има победнички одговор у виду неког дозвољеног броја c. Међутим, онда играч А може да у другом потезу, уместо броја N, запише број c и надаље следи добитничку стратегију другог играча. Заиста, по леми, број $N - c$ није дозвољен, па након потеза c ни број $N = (N - c) + c$ није дозвољен, те Б остаје управо у позицији која би за А била губитничка.

4. Прво ћемо дати пример 2012 узастопних шашавих бројева. Довољно је узети бројеве $N+2, N+3, \dots, N+2013$, где је $N = 2^{2013!}$.

За природан број n, означимо са $f(n)$ број шашавих бројева међу $n, n+1, \dots, n+2013$. Како је $f(1) < 2012$ (бројеви $1, 2, 3, 4, 5$ нису шашави), $f(N) \geqslant 2012$ и $|f(n+1) - f(n)| \leqslant 1$ за свако n, постоји n такво да је $f(n) = 2012$.

Друго решење. Означимо $N = \frac{2014!}{2011}$. Бројеви $2^N + i$ за $2 \leqslant i \leqslant 2010$ и $2012 \leqslant i \leqslant 2014$ су шашави; докажимо да $2^N + 1$ и $2^N + 2011$ то нису.

Претпоставимо да је $2^N + 2011 = a^b + b$ (слично се испитује и број $2^N + 1$). Из $2^b \leqslant a^b < 2^N$ следи $b < N$. Такође је $b > 2011$, јер би у супротном било $2011 - b = a^b - 2^N = (a - 2^{\frac{N}{b}})(\cdots + 2^{\frac{(b-1)N}{b}}) > 2^{\frac{N}{b}} > 2011$. Даље, ако $2 \mid a$, имамо $2^b \mid 2^N - a^b = b - 2011 < 2^b$, што је немогуће. Најзад, за $2 \nmid a$ и $2 \mid b$ имамо $b - 2011 = (2^{\frac{N}{2}} - a^{\frac{b}{2}})(2^{\frac{N}{2}} + a^{\frac{b}{2}}) > 2^{\frac{N}{2}}$, па је $2^N + 2011 = a^b + b > 2^{2^{N/2}}$, опет немогуће јер је $2^{\frac{N}{2}} > N$.

5. Одговор је $[\frac{3n-7}{4}]$ за $n > 3$, односно 1 за $n = 3$.

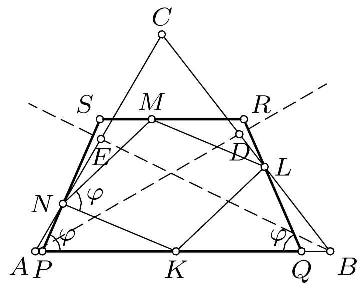
Троуглове са по две, једном или ниједном страницом која је уједно страница n-тоугла ($n > 3$) зовемо редом *ушима, танким* и *дебелим* троугловима. Нека у подели има a дебелих троуглова, b танких и c ушију. Број страница n-тоугла које они заузимају је $b + 2c = n$. С друге стране, укупан број троуглова је $a + b + c = n - 2$. Из ове две релације добијамо $c = a + 2$.

Како троуглова који нису дебели има највише $[\frac{n-1}{2}]$ различитих, укупан број N неподударних троуглова у подели није већи од $\frac{n-1}{2}+a$. С друге стране, у таквој подели има $a+2$ ушију, а све уши су подударне, па је $N \leqslant n-2-(a+1)=n-a-3$. Сабирањем добијамо $2N \leqslant (\frac{n-1}{2}+a)+(n-a-3)=\frac{3n-7}{2}$, тј. $N \leqslant [\frac{3n-7}{4}]$.

Најзад, повлачењем дијагонала A_0A_{2i} и $A_{2i-2}A_{2i}$ $(1\leqslant i\leqslant[\frac{n}{4}])$ и A_0A_j $(2[\frac{n}{4}] < j \leqslant n-2)$ добијамо пример са тачно $[\frac{n-1}{2}]+[\frac{n}{4}]-1=[\frac{3n-7}{4}]$ неподударних троуглова.

6. Нека је $KLMN$ ромб са $K\in AB$, $L\in BD$ и $N\in EA$. Посматрајмо трапез $PQRS$ са $P,Q\in AB$, $PQ\parallel RS$ и $\sphericalangle PQR=\sphericalangle QPS=\sphericalangle KNM=\varphi$ такав да су K,L,M,N на PQ,QR,RS,SP редом. Претпоставимо да је $\varphi>\alpha,\beta$. Тада R и S леже ван $\triangle ABC$.

Како је $\sphericalangle SNM=180^\circ-\varphi-\sphericalangle NMS=\angle RML$ и $\sphericalangle LRM=\sphericalangle MSN$, троуглови LRM и MSN су подударни, па је $LR=MS$. Слично, ако је Q' тачка на AB таква да је $\sphericalangle LQ'B=\varphi$, троуглови LRM и $KQ'L$ су подударни, па је $MR=LQ'=LQ$. Следи да је $RQ=RL+LQ=SM+MR=RS$.



Сада је $d(R,AB)=RQ\sin\varphi > RS\sin\alpha > d(R,AC)$ и аналогно $d(S,AB)>d(S,BC)$, што значи да тачке R и S леже изнад правих AD и BE редом (тј. у полуравнима у којима је C), одакле следи да обе тачке леже изнад праве DE. Ово је немогуће јер се дужи RS и DE секу у M.

Друго решење. Растојање од тачке X до праве p означавамо $d(X,p)$.

Лема. За произвољну тачку M на дужи DE важи $d(M,AB)=d(M,AC)+d(M,BC)$.

Доказ. Ако је $\frac{DM}{DE}=k$, важи $d(M,AB)=kd(E,AB)+(1-k)d(D,AB)$ $=kd(E,BC)+(1-k)d(D,AC)=d(M,BC)+d(M,AC)$. $\square$

Користимо исте ознаке као у првом решењу. Нека је a страница ромба и O његов центар. Имамо

$$\begin{aligned} d(M,AC)+d(M,BC) &= a(\sin\sphericalangle MNC+\sin\sphericalangle MLC), \\ \text{и} \quad d(M,AB) &= 2d(O,AB)=d(L,AB)+d(N,AB) \\ &= a(\sin\sphericalangle NKA+\sin\sphericalangle LKB). \end{aligned}$$

Међутим, ако је $\varphi>\alpha,\beta$, онда је $\sphericalangle NKA=\sphericalangle MNC+\varphi-\alpha > \sphericalangle MNC$ и аналогно $\sphericalangle LKB>\sphericalangle MLC$, па из горњих једначина следи $d(M,AB)>d(M,AC)+d(M,BC)$, контрадикција.