Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред - А категорија

1. Аца није добио већи количник од наставника, па важи $\frac{a_1}{a_2} \leqslant \frac{a_1+b_1+v_1+g_1}{a_2+b_2+v_2+g_2}$, односно

$$a_1(a_2+b_2+v_2+g_2) \leqslant a_2(a_1+b_1+v_1+g_1).$$

Аналогно тврђење важи и за Бранку, Веру и Горана, па због тога имамо четири неједнакости:

$$\begin{aligned} a_1(a_2+b_2+v_2+g_2) &\leqslant a_2(a_1+b_1+v_1+g_1), & b_1(a_2+b_2+v_2+g_2) &\leqslant b_2(a_1+b_1+v_1+g_1),\\ v_1(a_2+b_2+v_2+g_2) &\leqslant v_2(a_1+b_1+v_1+g_1), & g_1(a_2+b_2+v_2+g_2) &\leqslant g_2(a_1+b_1+v_1+g_1). \end{aligned}$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$(a_1+b_1+v_1+g_1)(a_2+b_2+v_2+g_2) \leqslant (a_1+b_1+v_1+g_1)(a_2+b_2+v_2+g_2).$$

Како у овој неједнакости заправо важи једнакост, у свакој од претходне четири неједнакости такође важи знак једнакости. Због тога је $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{a_1+b_1+v_1+g_1}{a_2+b_2+v_2+g_2}$, па су Бранка и Горан добили исти количник.

2. Анализа. Нека је $a = BC$, $b = AC$ и $a > b$. По услову задатка је $\sphericalangle BAC = 3\sphericalangle ABC$. Изаберимо тачку D на станици BC тако да важи $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD$, тј. $AD = DB$. Тада је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD$, па је и $AC = CD$. Дакле, $DA = a - b$.
Конструкција. Нека је без умањења општости $a \geqslant b$. Конструишимо дуж AC дужине b. Констуишимо кружницу k_1 са центром у C и полупречником b и кружницу k_2 са центром у A и полупречником $a-b$. Нека је D тачка пресека кружница k_1 и k_2. Конструишимо кружницу k_3 са центром у D и полупречником $a-b$. Тачка B је она тачка пресека кружнице k_3 и праве CD за коју важи $C-D-B$.
Доказ. По конструкцији, тачка D налази се на кружници k_1, па важи $CD = b$, и на кружници k_2, па важи $AD = a-b$. Слично, тачка B налази се на кружници k_3, па важи $DB = a-b$. Дакле, троуглови ACD и ADB су једнакокраки, па због $C-D-B$ важи $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DBA = 3\sphericalangle ABC$, што је и требало доказати.
Дискусија. Ако је $a = b$ задатак нема решења. Ако је $a > b$ кружнице k_1 и k_2 секу се у две различите тачке X и Y. Због симетрије, за $D = X$ и $D = Y$ добијамо подударне троуглове ABC, па задатак у овом случају има јединствено решење.

3. Ако је $k > 1$, $m > 1$ и $n > 1$, лева страна једнакости је дељива са 4, што није могуће јер 2014 није дељив са 4. Дакле, барем један од броја k, m и n једнак је 1. Ако је $k = 1$, цифра јединица броја са леве стране је 2, што није могуће јер је цифра јединица броја 2014 једнака 4. Ако је $m = 1$, једначина се своди на $2^k - 2004 = 10^m$. Одавде је $2^k > 2004$, тј. $k > 10$. Даље, како 4 дели број $2^k - 2004$, а 8 не дели овај број, закључујемо да је $m = 2$, што није могуће јер 2104 није степен броја 2. Дакле, $n = 1$ и дата једначина еквивалентна је са $2^k + 10^m = 2024$. Одавде је $10^m < 2024$, тј. $m \leqslant 3$. За $m = 1$ и $m = 2$ једначина нема решења, док је за $m = 3$ решење $(k, m, n) = (10, 3, 1)$.

4. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ и F подножје нормале из тачке B на праву AD.

Размотримо прво случај $\beta \geqslant \gamma$. Тада је $\sphericalangle ABF = 90^\circ - \alpha/2 \leqslant \beta$, па важе распореди $A-F-D$ и $B-F-E$. Даље, из тетивности четвороугла $ABDE$ добијамо $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle EBD + \alpha/2 = \beta - \sphericalangle ABF + \alpha/2 = 90^\circ - \gamma$. Са друге стране, $\sphericalangle OAB = (180^\circ - \sphericalangle AOB)/2 = 90^\circ - \gamma$, па како су тачке O и C са исте стране праве AB (јер је $\gamma < 90^\circ$), то су тачке A, O и E колинеарне.

Размотримо сада случај $\beta < \gamma \leqslant 90^\circ$. У овом случају је $\sphericalangle ABD < \sphericalangle ABE$, па важи $A-D-F$. Такође, $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ABF - \sphericalangle ABD = 90^\circ - \alpha/2 - \beta = (\gamma-\beta)/2 \leqslant \alpha/2 = \sphericalangle DAB$, па важи распоред $B-E-F$. Доказ завршавамо слично као у претходном случају.

На крају, размотримо случај $\beta < 90^\circ < \gamma$. У овом случају такође важи $A-D-F$ (јер је $\sphericalangle ABD < \sphericalangle ABF$). Међутим, сада је $\sphericalangle FBD = (\gamma-\beta)/2 > \alpha/2 = \sphericalangle FAB$, па важи распоред $F-B-E$. Даље, четвороугао $ADBE$ је тетиван, па важи $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAE - \sphericalangle DAB = 180^\circ - \sphericalangle DBE - \alpha/2 = \sphericalangle DBF - \alpha/2 = (\gamma-\beta)/2 - \alpha/2 = \gamma - 90^\circ$. Са друге стране, како су тачке C и O са различитих страна праве AB, важи $\sphericalangle OAB = (180^\circ - \sphericalangle AOB)/2 = (180^\circ - 2(180^\circ - \gamma))/2 = \gamma - 90^\circ$, одакле следи тврђење задатка.

5. Одговор је 23.

Из услова задатка примећујемо да на крају може опстати само једна врста. Како после сваког једења парности бројева једнорога и вукодлака остају различите, не могу остати само паукови. Дакле, свих 55 паукова морају да ишчезну, за шта је потребно бар 55 једења. Дакле, могу остати највише 23 створења.

С друге стране, ако 17 паукова одмах поједе једнороге, остају 23 вукодлака и 38 паукова. Нека надаље, кад год вукодлак поједе паука, паук поједе насталог једнорога. После сваког оваквог пара једења, број вукодлака остаје исти, а број паукова се смањује за 2. Тако ће после 19 пута по два једења остати само 23 вукодлака. Овим је доказ завршен.

Други разред - А категорија

1. Доказаћемо да тражене функције постоје. Нека су $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ квадратне функције такве да важи $f(x)+g(x)=2(x-1)^2$, $g(x)+h(x)=2x^2$ и $h(x)+f(x)=2(x+1)^2$, односно (решавањем овог система)

$$f(x)=x^2+2, \qquad g(x)=x^2-4x, \qquad h(x)=x^2+4x.$$

Због начина одабира ових функција збир ма које две има реалну нулу, а збир све три $f(x)+g(x)+h(x)=3x^2+2$ нема, чиме је доказано да је одговор на постављено питање потврдан.

2. Нека је $AO=x$, $BO=y$, $CO=z$, $DO=t$. Из услова задатка је $x+y=1$ и $z+t=1$. Даље, применом косинусне теореме на троуглове AOC и BOD добијамо

$$AC^2=x^2+z^2-xz, \qquad BD^2=y^2+t^2-yt.$$

По неједнакости између квадратне и аритметичке средине је $x^2+z^2\geqslant 2\left(\frac{x+z}{2}\right)^2$, па је

$$x^2+z^2-xz\geqslant 2\left(\frac{x+z}{2}\right)^2-xz=\frac{x^2+z^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+z}{2}\right)^2.$$

Аналогно је $y^2+t^2-yt\geqslant\left(\frac{y+t}{2}\right)^2$, па је

$$AC+BD=\sqrt{x^2+z^2-xz}+\sqrt{y^2+t^2-yt}\geqslant\frac{x+z}{2}+\frac{y+t}{2}=1.$$

3. Означимо са d тражени број. Нека је $x_n=(n+2014)^{n+2014}+n^n$, за $n\in\mathbb{N}$. Доказаћемо да је $d=4$. Нека је p прост број који не дели 2014 и $n>2014^{2014}$ такво да $p\mid n$. Тада $p\nmid n+2014$, па $p\nmid x_n$. Одавде закључујемо да број d може бити дељив једино простим бројевима из скупа $\{2,19,53\}$. За $n>2014^{2014}$ такво да $19\cdot 53\mid n-1$, имамо $x_n\equiv 1+1 \pmod{19}$ и $x_n\equiv 1+1 \pmod{53}$, па $19\nmid d$ и $53\nmid d$. Ако је n паран број, онда су бројеви $(n+2014)^{n+2014}$ и n^n дељиви са 4, па $4\mid x_n$. Ако је $n\equiv 1 \pmod 4$, онда је $x_n\equiv(-1)^{n+2014}+1^n\equiv 0 \pmod 4$. Слично, за $n\equiv -1 \pmod 4$ добијамо $x_n\equiv 1^{n+2014}+(-1)^n\equiv 0 \pmod 4$. Из свега наведеног закључујемо да $4\mid d$. Даље, за $n>2014^{2014}$ такво да је $n\equiv 3 \pmod 8$ имамо

$$x_n\equiv 1^{n+2014}+3^n\equiv 1+3\cdot(3^2)^{\frac{n-1}{2}}\equiv 1+3\equiv 4 \pmod 8,$$

па $8\nmid d$, односно $d=4$.

4. У троуглу $A_1A_2A_3$ важи

$$\sphericalangle A_2S_2A_3=180^\circ-(\sphericalangle S_2A_2A_3+\sphericalangle S_2A_3A_2)=180^\circ-\left(\frac{\sphericalangle A_1A_2A_3}{2}+\frac{\sphericalangle A_2A_3A_1}{2}\right)=90^\circ+\frac{\sphericalangle A_2A_1A_3}{2}.$$

Аналогно је и $\sphericalangle A_2S_3A_3=90^\circ+\frac{\sphericalangle A_2A_4A_3}{2}$. Са друге стране, петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$ је тетиван, па је $\sphericalangle A_2A_1A_3=\sphericalangle A_2A_4A_3$, тј. $\sphericalangle A_2S_2A_3=\sphericalangle A_2S_3A_3$. Дакле, четвороугао $A_2A_3S_3S_2$ је тетиван, па је

$$\sphericalangle A_2S_2S_3=180^\circ-\sphericalangle A_2A_3S_3=180^\circ-\frac{\sphericalangle A_2A_3A_4}{2}.$$

Аналогно добијамо и $\sphericalangle A_2S_2S_1=180^\circ-\frac{\sphericalangle A_2A_1A_5}{2}$. Коначно

$$\sphericalangle S_1S_2S_3=360^\circ-\sphericalangle A_2S_2S_3-\sphericalangle A_2S_2S_1=\frac{\sphericalangle A_2A_3A_4+\sphericalangle A_2A_1A_5}{2},$$

па како су углови $A_2A_3A_4$ и $A_2A_1A_5$ тупи, и њихова аритметичка средина је туп угао. Аналогно добијамо и да су преостали углови петоугла $S_1S_2S_3S_4S_5$ тупи.

5. Посматрајмо становника A. Нека становник D воли становника A, становник A поштује становника B, а становник B воли становника C. По условима задатка, становник A воли становника C, а становник D поштује становника B, одакле следи да становник D воли становника C. Како становник D воли само једног становника, закључујемо да је $A = C$, тј. A воли самог себе. Коначно, становник B воли становника A, али воли и себе, дакле $B = A$, тј. A и поштује самог себе.

Трећи разред - А категорија

1. Можемо претпоставити да су два од бројева x, y и z ненегативна (у супротном доказ вршимо за бројеве $-x$, $-y$ и $-z$). Нека је без умањења општости $x, y \geqslant 0$. Из датог услова је $z = -x - y$, па важи

$$(x^3+y^3+z^3)^2 = (-3x^2y-3xy^2)^2 = 9x^2y^2(x+y)^2 \quad \text{и} \quad (x^2+y^2+z^2)^3 = 8(x^2+y^2+xy)^3.$$

Како је $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, то важи $x^2+y^2+xy \geqslant 3xy$ и $4(x^2+y^2+xy) \geqslant 3(x^2+y^2+xy)+3xy = 3(x+y)^2$. Коначно,

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = 2(x^2+y^2+xy)^2 \cdot 4(x^2+y^2+xy) \geqslant 2(3xy)^2 \cdot 3(x+y)^2 = 6(x^3+y^3+z^3)^2.$$

2. Доказ изводимо индукцијом по $M = n+k$. За $n+k=0$, тј. $n=k=0$ обе суме једнаке су 1, па тврђење важи. Претпоставимо зато да тврђење важи за све $n' \geqslant k'$ такве да је $n'+k' \leqslant M$ и доказимо да важи за све $n \geqslant k$ такве да је $n+k = M+1$. Ако је $n=k$, тада је

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} + 1 = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1},$$

а ако је $k=0$, тада је

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}.$$

Нека је зато $n > k \geqslant 1$. Коришћењем идентитета

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b},$$

добијамо

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{n+1}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}, \tag{†}$$

као и

$$\sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \left(\binom{n-i-1}{k} + \binom{n-i-1}{k-1} \right) + 2^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1-k} 2^i \binom{n-1-i}{k} + \sum_{i=0}^{n-1-(k-1)} 2^i \binom{n-1-i}{k-1}. \tag{‡}$$

Како је $n-1 \geqslant k$ и $n-1+k = M$, то је по индуктивној претпоставци

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n-1-k} 2^i \binom{n-1-i}{k} = 2^n,$$

а како је $n-1 \geqslant k-1$ и $n-1+k-1 = M-1$, то је по индуктивној претпоставци

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n-1-(k-1)} 2^i \binom{n-1-i}{k-1} = 2^n.$$

Сада, тражену једнакост добијамо сабирањем једнакости (†) и (‡).

3. Приметимо да за

$$n = (a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_6 = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 6^i$$

важи $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \pmod 5$ и $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i(-1)^i \pmod 7$. Како је број $(4005 \cdot 6!)^3$ дељив бројем 5, из претходног закључка добијамо

$$\begin{aligned}0 &\equiv 5+0+2+1+0+0+4+4+0+a+2+2+b+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0\\ &= 20+a+b \equiv a+b \pmod 5.\end{aligned}$$

Како важи $0 \leqslant a, b \leqslant 5$, следи $0 \leqslant a+b \leqslant 10$, па утврђујемо да је $a+b \in \{0,5,10\}$. Даље, по Вилсоновој теореми (или директном провером) је $(4005 \cdot 6!)^3 \equiv (1\cdot(-1))^3 = -1 \pmod 7$, па добијамо

$$\begin{aligned}-1 &\equiv 5-0+2-1+0-0+4-4+0-a+2-2+b-0+0-0+0-0+0-0+0-0+0-0+0\\ &= 6-a+b \pmod 7,\end{aligned}$$

одакле је $b-a \equiv 0 \pmod 7$. Из $-5 \leqslant b-a \leqslant 5$ одавде закључујемо да је $b-a=0$, тј. $a=b$. Дакле, $a=b=0$ или $a=b=5$. Најзад, приметимо да је број $(4005\cdot 6!)^3$ дељив са $(3^4)^3 = 3^{12}$ али не и са 3^{13}, и да је дељив са $(2^4)^3 = 2^{12}$ али не и са 2^{13}. Дакле, он је дељив са 6^{12} али не и са 6^{13}, па се у бази са основом 6 завршава са тачно 12 нула. Следи $b \neq 0$, те коначно имамо $a=b=5$.

4. Нека је F тачка на дужи AB таква да је $AE = BF$. Из услова задатка закључујемо $BF = AE < EB$. Даље, троугао ADB је једнакокраки, па је $\sphericalangle EAD = \sphericalangle FBD$. Дакле, $\triangle AED \cong \triangle BFD$, па је $ED = FD$, а самим тим и $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DFE$. Једнакост размера из задатка даје $BF : BE = AE : BE = CD : CE$, па је по Талесовој теореми $DF \parallel BC$. Сада је $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DFE = \sphericalangle DEE$, тј. троугао BCE је једнакокраки.

5. Нека је A_1 један од становника. Даље, низ становника $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ изабран је тако да становник A_{2k-1} поштује становника A_{2k} и становник A_{2k} воли становника A_{2k+1}, за $k \in \mathbb{N}$ (неки становници се у низу могу појављивати више пута). Докажимо индукцијом по d да, за свако непарно (односно парно) $n > d$ становник A_{n-d} воли (односно поштује) становника A_n. Ово је тачно за $d=1$. Нека је $d>1$. За непарно (парно) $n > d$, по индуктивној претпоставци, становник A_{n-d} поштује (воли) становника A_{n-1}, па по услову (2) становник A_{n-d} воли (поштује) становника A_n, и индукција је готова.

Означимо број становника са m. У поднизу $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{2m+1}$ неки становник се појављује више пута, рецимо $A_i = A_j$ за непарне $i<j$. На основу доказаног, становник A_i воли становника A_j, тј. самог себе, чиме је доказ завршен.

Четврти разред - А категорија

1. Ако је $(a,b,c) = (1,1,1)$ тада је сваки реалан број x решење ове једначине, па у том случају ова једначина има бесконачно много решења. Претпоставимо да $(a,b,c) \neq (1,1,1)$. Нека је $f(x) = a^x + b^x + c^x - 3$. Тада је $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c$ и $f''(x) = a^x(\ln a)^2 + b^x(\ln b)^2 + c^x(\ln c)^2$. Како нису сва три броја a,b,c једнака јединици, за сваки реалан број x је $f''(x) > 0$. Због тога је функција $f'(x)$ строго растућа на читавом скупу $\mathbb{R}$. Као таква, функција $f'(x)$ може имати највише једну нулу у скупу $\mathbb{R}$. Ако $f'(x)$ нема реалних нула, будући да је $f'(x)$ непрекидна на $\mathbb{R}$, следи да је $f'(x)$ истог знака на целом скупу $\mathbb{R}$. Тада је $f(x)$ или строго опадајућа на $\mathbb{R}$ или строго растућа на $\mathbb{R}$, а у оба случаја она може имати највише једну реалну нулу. Дакле, $f'(x)$ има реалну нулу x_0. Функција $f'(x)$ је строго растућа, па је негативна на интервалу $(-\infty, x_0)$, а позитивна на интервалу $(x_0, +\infty)$. Самим тим, функција $f(x)$ је строго опадајућа на интервалу $(-\infty, x_0]$ (јер је непрекидна у x_0) и строго растућа на интервалу $(x_0, +\infty)$, па у сваком од ових интервала $f(x)$ може имати највише једну нулу. Дакле, у овом случају $f(x)$ може имати највише две реалне нуле, те је једино решење задатка $(a,b,c) = (1,1,1)$.

2. Нека су за све $k \in \{1,2,\ldots,2014\}$ записани сви делиоци броја $2014+k$ не мањи од k. Докажимо да је сваки природан број n од 1 до 4028 записан тачно једном. Ако је $n > 2014$, тада је број n записан за свако $k \in \{1,2,\ldots,2014\}$ такво да $n \mid k+2014$. Међутим, тада је $n = k+2014$, јер је $2n > 4028 \geqslant k+2014$, па је n записан тачно једном (за $k = n-2014$). Ако је $n \leqslant 2014$, тада је број n записан за свако k такво да важи $n \mid 2014+k$ и $k \leqslant n$. Нека је $2014 = nt+s$, где је $0 \leqslant s \leqslant n-1$, $t \in \mathbb{Z}$. Према претходном, број n записан је за $k = n-s$. Докажимо да n не може бити записан за два различита броја k_1 и k_2. Претпоставимо супротно, тј. да $n \mid 2014+k_1$, $n \mid 2014+k_2$ и $n \geqslant \max\{k_1,k_2\}$. Међутим, тада $n \mid k_1-k_2$, што није могуће јер је $0 < |k_1-k_2| < n$.

Како је сума дата у задатку једнака броју записаних бројева, то је она једнака 4028.

3. За $k=2$ и $n=9$ сваки од датих бројева, тј. $\binom{9}{0} = 1$, $\binom{9}{1} = 9$ и $\binom{9}{2} = 36$, је потпун квадрат.

Докажимо да је $k=2$ највећи број са датом особином. Претпоставимо супротно, тј. да постоји $n \geqslant 3$ такво да је сваки од бројева $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ и $\binom{n}{3}$ потпун квадрат. Нека је

$$a^2 = n, \quad b^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad c^2 = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Из $a^2(n-1) = 2b^2$ добијамо да $a \mid b$ и да је $n-1$ паран. Аналогно, из $b^2(n-2) = 3c^2$ добијамо да $b \mid c$ и да је $n-2$ дељив са 3. Дакле, n даје остатак 1 при дељењу са 2, а остатак 2 при дељењу са 3, па је $n = 6s+5$, за неко $s \in \mathbb{Z}$. Сада, заменом у једнакост $a^2(n-1) = 2b^2$ налазимо да је $a^2(3s+2) = b^2$, па је $3s+2$ потпун квадрат, што није могуће.

4. Како су кружнице k' и k_0 међусобно нормалне, тангента у тачки A на кружницу k' пролази кроз центар кружнице k_0. И кружница k'' нормална је на k_0, па тангента у тачки A на k'' такође пролази кроз центар кружнице k_0, тј. ова права заједничка је тангента кружница k' и k''. Одатле закључујемо да се кружнице k' и k'' додирују у тачки A, а аналогно се кружнице k' и k''' додирују у тачки B, односно кружнице k'' и k''' у тачки C.

Посматрајмо инверзију с центром у тачки A и произвољним полупречником. Како кружнице k' и k'' пролазе кроз центар инверзије и додирују се, оне се пресликавају у паралелне праве k'^* и k''^*. Кружница k_0 такође пролази кроз тачку A и нормална је на k' и k'', па се она пресликава у праву k_0^* нормалну на k'^* и k''^*, која их сече у тачкама B^* и C^*, сликама тачака B и C, респективно. Кружница k''' пресликава се у кружницу k'''^* која мора додиривати праве k'^* и k''^*, и чији центар мора припадати правој k_0^* (ово следи због тога што кружница k'''^* мора бити нормална на праву k_0^*) — дакле, кружница k'''^* јесте кружница над пречником B^*C^*.

Нека је P^* слика тачке P, $P^* \in k'''^*$. Кружница k_1 пресликава се у кружницу ${k_1}^*$ која пролази кроз тачку P^* и која мора бити нормална на праве k'^* и k_0^*, па се њен центар налази у пресеку ових правих, тачки B^*. Аналогно, слика k_2^* кружнице k_2 јесте кружница с центром у тачки C^* која пролази кроз тачку P^*. Тврђење задатка биће показано уколико установимо да су кружнице k_1^* и k_2^* међусобно нормалне, тј. да тангента једне од њих у тачки P^* пролази кроз центар друге. И заиста, како је $\sphericalangle B^*P^*C^*$ прав (као угао над пречником B^*C^*), закључујемо да је права B^*P^* тангента на k_2^*, што је и тражено.

5. У првом потезу играч A поставља знак $+$ испред броја 1, а затим игра на следећи начин. Он подели бројеве 2^1 до 2^{1000} у парове: $(2^{8k+1}, 2^{8k+5})$, $(2^{8k+2}, 2^{8k+6})$, $(2^{8k+3}, 2^{8k+7})$, $(2^{8k+4}, 2^{8k+8})$, за $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 124\}$, и после сваког потеза играча B ставља исти знак као и B, али испред другог елемента пара у односу на онај испред кога је B претходно ставио знак. Како је збир елемената сваког пара дељив са 17, играјући на овај начин играч A постиже да после сваког његовог одиграног потеза, па и на крају игре, вредност израза даје остатак 1 при дељењу са 17.

Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред - Б категорија

1. Докажимо да је $Q \subseteq P$, тако што ћемо доказати да је сваки елемент скупа Q уједно и елемент скупа P. Нека је $x \in Q$. По дефиницији скупа Q важи $x \notin B$ и $x \in A \cup C$. Из друге релације закључујемо да је $x \in A$ или $x \in C$. Ако је $x \in C$, тада је и $x \in P$ (јер је $P = (A \setminus B) \cup C$), а ако је $x \in A$, како $x \notin B$, то је $x \in A \setminus B$, па опет важи $x \in P$.

2. Троугао BAF је једнакокраки, па је симетрала угла BAF уједно и симетрала дужи BF. Слично, симетрале углова BCD и DEF су уједно и симетрала дужи BD и DF. Како се симетрале дужи BF, FD и BD секу у центру описане кружнице троугла BDF, тврђење је доказано.

3. Нека су a и b целобројна решења дате једначине. Како број 2014 даје остатак 1 при дељењу са 3, то и број $9a^2 - b^2 + 6b$ даје остатак 1 при дељењу са 3. Бројеви $9a^2$ и $6b$ су дељиви са 3, па закључујемо да b^2 даје остатак 2 при дељењу са 3. Међутим, квадрати целих бројева дају остатак 0 или 1 при дељењу са 3, па дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

4. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ и F подножје нормале из тачке B на праву AD.

Како је $\beta \geqslant \gamma$ важи $\sphericalangle ABF = 90^\circ - \alpha/2 \leqslant \beta$, а самим тим и распореди $A - F - D$ и $B - F - E$. Даље, из тетивности четвороугла $ABDE$ добијамо $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle EBD + \alpha/2 = \beta - \sphericalangle ABF + \alpha/2 = 90^\circ - \gamma$. Са друге стране, $\sphericalangle OAB = (180^\circ - \sphericalangle AOB)/2 = 90^\circ - \gamma$, па како су тачке O и C са исте стране праве AB (јер је $\gamma < 90^\circ$), то су тачке A, O и E колинеарне.

5. Укупна дужина балвана је 345m. Да имамо само један део те дужине, требало би направити 344 резова. Међутим, 80 делова већ постоји, па можемо закључивати као да је почетних 79 резова већ направљено. Значи треба учинити још $344 - 79 = 265$ резова.

Други разред - Б категорија

1. Да би дати израз био дефинисан потребно је да важи $x \neq 0$ и $\dfrac{7x-1}{x} > 0$, односно $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\dfrac{1}{7}, +\infty\right) = \mathcal{D}$. Даље, свако $x \in \mathcal{D}$ такво да важи $\dfrac{x-1}{x} < 0$ је решење дате неједначине (јер је лева страна увек ненегативна), односно сви $x \in \left[\dfrac{1}{7}, 1\right) = \mathcal{R}_1$ су решења дате неједначине. Нека је даље, $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{R}_1$. Тада, дата неједначина је еквивалентна са

$$\frac{7x-1}{x} > \frac{(x-1)^2}{x^2}, \text{ тј. } 0 < \frac{7x-1}{x} - \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{6x^2+x-1}{x^2}.$$

Последња неједначина је еквивалентна са $6x^2 + x - 1 > 0$. Решења одговарајуће квадратне једначине су $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$, па су у овом случају решења сви $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$.

Коначно, решења неједначину су сви $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{1}{7}, +\infty\right)$

2. Леву страну дате једначине можемо записати као

$$(x^2+x+3)(x^2+3x+3) = (x^2+2x+3-x)(x^2+2x+3+x) = (x^2+2x+3)^2 - x^2,$$

па је дата једначина еквивалентна са $(x^2+2x+3)^2 = 4x^2$. Дакле, решења почетне једначине су сва решења једначина $x^2+2x+3 = 2x$ и $x^2+2x+3 = -2x$. Прва квадратна једначина нема решења у скупу реалних бројева, док су решења друге $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$. Ово су уједно и сва решења дате једначине.

3. Посматрајмо остатак леве стране једнакости при дељењу са 9. Број $3a^2 + 3a = 3a(a+1)$ даје остатак 0 или 6 при дељењу са 9 (јер $a^2 + a$ даје остатак 0 или 2 при дељењу са 3), па лева страна једнкости даје остатак 7 или 4 при дељењу са 9. Са друге стране, трећи степен целог броја при дељењу са 9 даје остатак 0, 1 или 8, па дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

4. Нека су G и H тачке на правој BC такве да је $AG \parallel BI$ и $AH \parallel CI$. Тада је $\sphericalangle GAB = \sphericalangle ABI = \sphericalangle IBE = \sphericalangle AGB$, па је $AB = GB$. Слично је $CH = AC$. Даље, из Талесове теореме имамо

$$\frac{EI}{AI} = \frac{EB}{BG} = \frac{EB}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{EI}{AI} = \frac{EC}{CH} = \frac{EC}{AC},$$

па је $\dfrac{EI}{AI} = \dfrac{BE+EC}{AB+AC} = \dfrac{BC}{AB+AC}$, што је и требало доказати.

5. Сваки елемент скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ налази се у скупу A, B, C или $(A \cup B \cup C)^c$, па је тражени број једнак броју распореда бројева $\{1, 2, \ldots, n\}$ у ова четири скупа тако да су задовољени дати услови. Одредимо број ових распореда.

Елемент који припада скупу $A \cap C$ можемо изабрати на n начина. Изаберимо затим два елемента који припадају скупу $A \cap B$. Ови елементи различити су од елемента који се налази у $A \cap C$ (јер је $A \cap B \cap C = \emptyset$), па њих можемо изабрати на $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ начина. Сваки од преосталих $n-3$ можемо сместити: 1) или само у скуп A (тј. у скуп $A \setminus (B \cup C)$); 2) или само у скуп B (тј. у скуп $B \setminus (A \cup C)$); 3) или само у скуп C (тј. у скуп $C \setminus (A \cup B)$); 4) или у скуп $B \cap C$; 5) или ни у један од скупова A, B, C. Дакле, за њихово размештање имамо 5^{n-3} начина, па тражене подскупове можемо одабрати на $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 5^{n-3}$ начина.

Трећи разред - Б категорија

1. Представимо комплексне бројеве a и b у тригонометријском облику, тј. $a = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ и $b = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i \sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$. По Муавровој формули имамо $a^3 = 8(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 8$ и $b^3 = 8(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = 8$. Сада, ако је n облика $3k+1$ имамо

$$a^n + b^n + c^n = a^{3k+1} + b^{3k+1} + c^{3k+1} = a \cdot (a^3)^k + b \cdot (b^3)^k + c \cdot (c^3)^k = 8^k(a+b+c) = 0,$$

а ако је n облика $3k+2$ имамо

$$a^n + b^n + c^n = a^{3k+2} + b^{3k+2} + c^{3k+2} = a^2 \cdot (a^3)^k + b^2 \cdot (b^3)^k + c^2 \cdot (c^3)^k = 8^k(a^2+b^2+c^2) = 0.$$

Дакле, ако n није дељиво са 3 важи $a^n + b^n + c^n = 0$.

2. Из услова задатка је

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 5\vec{n}) = 7\vec{m} \cdot \vec{m} + 16\vec{m} \cdot \vec{n} - 15\vec{n} \cdot \vec{n} = 7|\vec{m}|^2 + 16\vec{m} \cdot \vec{n} - 15|\vec{n}|^2 \\ 0 &= \vec{c} \cdot \vec{d} = (\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot (7\vec{m} - 2\vec{n}) = 7\vec{m} \cdot \vec{m} - 30\vec{m} \cdot \vec{n} + 8\vec{n} \cdot \vec{n} = 7|\vec{m}|^2 - 30\vec{m} \cdot \vec{n} + 8|\vec{n}|^2. \end{aligned}$$

Из прве једнакости добијамо да је $\vec{m} \cdot \vec{n} = \dfrac{15|\vec{n}|^2 - 7|\vec{m}|^2}{16}$, а из друге да је $\vec{m} \cdot \vec{n} = \dfrac{7|\vec{m}|^2 + 8|\vec{n}|^2}{30}$, па је $30(15|\vec{n}|^2 - 7|\vec{m}|^2) = 16(7|\vec{m}|^2 + 8|\vec{n}|^2)$, тј. $|\vec{m}| = |\vec{n}|$. Нека је α угао између вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Тада је $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}|^2 \cos\alpha$, па из прве једнакости добијамо $|\vec{m}|^2 \cos\alpha = |\vec{m}|^2/2$, тј. $\alpha = \pi/3$.

3. Нека је $x^2 - ax = b$ и $x^3 - ax = c$. Тада је $c = x^3 - ax = x(ax+b) - ax = ax^2 + (b-a)x = a(ax+b) + (b-a)x = (a^2 - a + b)x + ab$, тј. $c - ab = (a^2 - a + b)x$. Према томе, ако је $a^2 - a + b \neq 0$, тада је $x = \dfrac{c - ab}{a^2 - a + b}$, па како су $c - ab$ и $a^2 - a + b$ рационални бројеви (јер је $a, b, c \in \mathbb{Q}$), то је и x рационалан број.

Дакле, довољно је доказати да $a^2 - a + b \neq 0$. Претпоставимо супротно, тј. да је

$$a^2 - a + b = x^2 - ax + (a^2 - a) = 0.$$

Дискриминанта ове квадратне једначине (по x) је $D = a^2 - 4(a^2 - a) = a(4 - 3a)$, па како је $a > \dfrac{4}{3}$, то је $D < 0$, односно добијена квадратна једначина нема реалних решења, што је контрадикција.

4. Ако су k_1, k_2 и k_3 истог полупречника, троугао $O_1O_2O_3$ је једнакостраничан и O му је центар. Дакле, треба доказати обратно тврђење. Обележимо са P_1, P_2 и P_3 тачке додира кружница k_2 и k_3, k_3 и k_1, k_1 и k_2, редом.

Нека су полупречници кружница k_1, k_2 и k_2, редом r_1, r_2, r_3, и нека је $O_1O_2 = c$, $O_2O_3 = a$ и $O_3O_1 = b$. Тада је $O_1O_2 = O_1P_3 + P_3O_2 = r_1 + r_2$, и слично $O_2O_3 = r_2 + r_3$, $O_3O_1 = r_3 + r_1$. Решавањем овог система добијамо да је $r_1 = \dfrac{b+c-a}{2}$, $r_2 = \dfrac{c+a-b}{2}$ и $r_3 = \dfrac{a+b-c}{2}$, односно P_1, P_2 и P_3 су тачке у којима уписани круг троугла $O_1O_2O_3$ додирује странице O_2O_3, O_3O_1 и O_1O_2, редом. Тачка O је центар уписаног круга троугла $O_1O_2O_3$, па из Питагорине теореме добијамо $OO_1^2 = r^2 + r_1^2$, $OO_2^2 = r^2 + r_2^2$ и $OO_3^2 = r^2 + r_3^2$, где је r полупречник круга уписаног у троугао $O_1O_2O_3$. Са друге стране, кружница k додирује кружнице k_1, k_2 и k_3, па важи $OO_1 + r_1 = R$, $OO_2 + r_2 = R$ и $OO_3 + r_3 = R$, где је R полупречник кружнице k. Сада је $r^2 + r_1^2 = OO_1^2 = (R - r_1)^2 = R^2 - 2Rr_1 + r_1^2$, па је $r_1 = \dfrac{R^2 - r^2}{2R}$, и слично $r_2 = r_3 = \dfrac{R^2 - r^2}{2R}$, чиме је тврђење доказано.

5. а) Дати број се може добити на следећи начин (слово изнад стрелице назначава која је машина употребљена)

$$(19,81) \to^{\text{В}} (81,19) \to^{\text{Б}} (62,19) \to^{\text{Б}} (43,19) \to^{\text{Б}} (24,19) \to^{\text{Б}} (5,19) \to^{\text{В}} (19,5) \to^{\text{Б}} (14,5) \to^{\text{Б}} (9,5) \to^{\text{Б}} (4,5)$$
$$\to^{\text{В}} (5,4) \to^{\text{Б}} (1,4) \to^{\text{В}} (4,1) \to^{\text{А}} (5,1) \to^{\text{А}} (6,1) \to^{\text{В}} (1,6) \to^{\text{А}} (7,6) \to^{\text{В}} (6,7) \to^{\text{А}} (13,7) \to^{\text{В}} (7,13).$$

б) Докажимо следеће: ако смо употребом неке од три машине од пара (m,n) добили пар (m',n') такав да су m' и n' дељиви са 3, тада су и m и n дељиви са 3.

Да бисмо доказали ово тврђење, довољно је размотрити три случаја у зависности од тога коју смо машину употребили. Ако смо употребили машину А тада је $m' = m - n$, а $n' = n$. Дакле, $m = m' + n'$ и $n = n'$, па су бројеви m и n дељиви са 3. Слично, ако смо употребили машину Б важи $m = m' - n'$ и $n = n'$, а ако смо употребили машину В важи $m = n'$ и $n = m'$, па су m и n заиста дељиви са 3.

У датом примеру број 19 није дељив са 3, тако да се употребом датих машина не може добити број $(12,21)$.

Четврти разред - Б категорија

1. Дата неједнакост еквивалентна је са $\ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1} > 0$, за $x > 1$. Нека је $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Тада је

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\,.$$

Како је $f'(x) > 0$, за $x > 1$, функција f је растућа на $(0,+\infty)$, па како је непрекидна у 1 добијамо $f(x) > f(1) = 0$, за $x > 1$.

2. Нека је O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$, тачке A', B', C', D' подножја нормала из O на странице AB, BC, CD, DA, редом, и $OA' = a', OB' = b', OC' = c', OD' = d'$. По теореми о три нормале је $\sphericalangle A'VO = \alpha, \sphericalangle B'VO = \beta, \sphericalangle C'VO = \gamma, \sphericalangle D'VO = \delta$, па је из одговарајућих правоуглих троуглова

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{H^2}{a'^2} + \frac{H^2}{c'^2}, \quad \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\delta = \frac{H^2}{b'^2} + \frac{H^2}{d'^2},$$

где је H дужина висине пирамиде. Двострука површина правоуглог троугла AOB једнака је $a' \cdot AB = AO \cdot BO$, па је

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{AB^2}{AO^2 \cdot BO^2} = \frac{AO^2 + BO^2}{AO^2 \cdot BO^2} = \frac{1}{BO^2} + \frac{1}{AO^2}.$$

Слично добијамо $1/b'^2 = 1/BO^2 + 1/CO^2$, $1/c'^2 = 1/CO^2 + 1/DO^2$ и $1/d'^2 = 1/DO^2 + 1/AO^2$, одакле следи тврђење задатка.

3. Број $3x + 7y$ дељив је са 19, па је и број $8(3x + 7y) = 24x + 56y$ дељив са 19. Сада, како су бројеви $24x + 56y$ и $19x + 19y$ дељиви закључујемо да је и њихов збир, тј. $43x + 75y$ дељив са 19, што је и требало доказати.

4. Нека је AB хипотенуза троугла ABC и нека споља приписана кружница k која одговара хипотенузи додирује праве AB, BC, CA у тачкама R, P, Q, редом. Ако је O центар кружнице k, тада важи $OP \perp BC$, $OQ \perp CA$, $PC \perp CQ$ и $OP = OQ = R$, па је четвороугао $OPCQ$ квадрат. Са друге стране, BP и BR су тангенте из B на k, па је $BR = BP$. Слично је и $AR = AQ$, па је $c = BR + AR = BP + AQ = CP - BC + CQ - AC = 2R - a - b$, где је $a = BC$ и $b = AC$. Дакле, $2R = a + b + c$. Сада је $4R^2 = (a+b+c)^2 = 2c^2 + 2(ab + bc + ca)$, па како важи $2ab \leqslant a^2 + b^2$ и $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$, то је

$$2R^2 = c^2 + ab + c(a+b) \leqslant c^2 + \frac{a^2+b^2}{2} + 2c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)c^2.$$

Како је $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}=2\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2$, из претходне неједнакости следи тражена.

5. а) Запишимо $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ и $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$, где су p_i, за $i\in\{1,2,\dots,k\}$, различити прости бројеви, али притом дозвољавамо да неки од бројева α_i, β_i буду нуле (у случају да неки од бројева a и b има просте чиниоце које други нема). Приметимо да ако дозволимо да су неки од њих нуле, то не утиче на дефиницију функције f, јер за сваки прост број p важи $p^{0^2}=1$.

Сада је $ab=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$, па је

$$f(ab)=p_1^{(\alpha_1+\beta_1)^2}p_2^{(\alpha_2+\beta_2)^2}\dots p_k^{(\alpha_k+\beta_k)^2}.$$

С друге стране је $f(a)=p_1^{\alpha_1^2}p_2^{\alpha_2^2}\dots p_k^{\alpha_k^2}$ и $f(b)=p_1^{\beta_1^2}p_2^{\beta_2^2}\dots p_k^{\beta_k^2}$, па је

$$(f(a)\cdot f(b))^2=p_1^{2(\alpha_1^2+\beta_1^2)}p_2^{2(\alpha_2^2+\beta_2^2)}\dots p_k^{2(\alpha_k^2+\beta_k^2)}.$$

По неједнакости између аритметичке и квадратне средине, за све $i\in\{1,2,\dots,k\}$ важи $(\alpha_i+\beta_i)^2\leqslant 2(\alpha_i^2+\beta_i^2)$, одакле добијамо тражену неједнакост.

б) Нека је $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, где су p_i различити прости бројеви и $\alpha_i\in\mathbb{N}$, за $i\in\{1,2,\dots,k\}$. Тада је

$$\begin{aligned} f\left(a^{2^n}\right) &= f\left(p_1^{2^n\alpha_1}p_2^{2^n\alpha_2}\dots p_k^{2^n\alpha_k}\right)=p_1^{(2^n\alpha_1)^2}p_2^{(2^n\alpha_2)^2}\dots p_k^{(2^n\alpha_k)^2}\\ &= p_1^{4^n\alpha_1^2}p_2^{4^n\alpha_2^2}\dots p_k^{4^n\alpha_k^2}=\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}\right)^{4^n}=f(a)^{4^n}.\end{aligned}$$