Language: **Serbian**

Day: **1**

EGMO | 2014
European Girls' Mathematical Olympiad
Antalya · Turkey

subota, 12. april 2014.

Zadatak 1. Odrediti sve realne konstante t, tako da za svako a, b, c koji su dužine stranica nekog trougla važi da su i $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ dužine stranica nekog trougla.

Zadatak 2. Neka su D i E tačke u unutrašnjosti stranica AB i AC, respektivno, trougla ABC, tako da je $DB = BC = CE$. Neka se prave CD i BE seku u F. Dokazati kolinearnost centra I upisanog kruga trougla ABC, ortocentra H trougla DEF i središta M luka BAC kruga opisanog oko trougla ABC.

Zadatak 3. Za prirodan broj m, označimo sa $d(m)$ broj pozitivnih delilaca m, a sa $\omega(m)$ broj različitih prostih delilaca m. Neka je k prirodan broj. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n tako da $\omega(n) = k$, i $d(n)$ ne deli $d(a^2 + b^2)$ ni za koja dva prirodna broja a, b za koje važi $a + b = n$.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

Language: **Serbian**

Day: 2

nedelja, 13. april 2014.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje postoje celi brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ tako da važi: Ako $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ i n deli $2i + j$, onda $x_i < x_j$.

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj. Dato je n kutija i u svakoj od njih nalazi se nenegativan broj kamenčića. U svakom potezu dozvoljeno je uzeti dva kamenčića iz neke kutije, odstraniti jedan od njih, a drugi staviti u neku drugu kutiju. Početnu konfiguraciju kamenčića zovemo *rešivom* ako je u konačnom (nenegativnom) broju poteza moguće dostići konfiguraciju bez praznih kutija. Odrediti sve početne konfiguracije koje nisu rešive, ali postaju rešive čim se doda jedan kamenčić u bilo koju kutiju.

Zadatak 6. Odrediti sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

važi za sve realne brojeve x i y.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.