34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša prolećna varijanta, 24.2.2013.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	U ravni je dato šest tačaka. Poznato je da se ove tačke mogu podeliti u dve grupe od po tri tačke, tako da tačke iz iste grupe čine temena trougla. Da li odatle sledi da se ove tačke mogu podeliti u dve grupe od po tri tačke, tako da tačke iz iste grupe čine temena trougla i da ta dva trougla nemaju zajedničkih tačaka (kako unutrašnjih tako i ivičnih)?
4	2.	Na tabli je zapisan prirodan broj A. U svakom koraku brišemo broj koji se trenutno nalazi na tabli (neka je to broj x), a umesto njega pišemo ili $x+9$ ili broj koji se dobija izbacivanjem cifre 1 sa bilo koje pozicije u broju x. Da li je uvek moguće, počevši od broja A, nakon nekoliko poteza dobiti broj $A+1$? (Ako želimo da obrišemo cifru 1 sa vodeće pozicije, brišemo i sve nule koje slede neposredno nakon te jedinice).
4	3.	Svaki od 11 tegova ima masu koja iznosi prirodan broj grama. Nikoja dva tega nemaju jednake mase. Poznato je da, ako izaberemo bilo koji podskup ovog skupa tegova i rasporedimo ga u bilo kom rasporedu na dva tasa terazija, ukoliko se broj tegova na jednom i drugom tasu razlikuju, uvek će teža biti ona strana na kojoj se nalazi veći broj tegova. Dokazati da barem jedan od ovih tegova ima masu veću od 35 grama.
5	4.	Na šahovskoj tabli, dimenzije 8×8, nalazi se 8 topova, tako da se nikoja dva topa međusobno ne napadaju. Sva polja table podeljena su ovim topovima na sledeći način: polje na kome se nalazi top pripada tom topu; ako neko polje napadaju dva topa, ono pripada onom topu koji je bliži tom polju, a ukoliko je to polje jednako udaljeno od oba topa, svaki top dobija po polovinu tog polja. Dokazati da je svaki top ukupno dobio istu površinu na tabli.
5	5.	U četvorouglu $ABCD$, ugao kod temena B iznosi $150°$, ugao kod temena C iznosi $90°$, a stranice AB i CD su jednake. Odrediti ugao između prave BC i prave koja spaja sredine stranica BC i AD.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša prolećna varijanta, 24.2.2013.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	Na tabli je zapisan prirodan broj A. U svakom koraku brišemo broj koji se trenutno nalazi na tabli (neka je to broj x), a umesto njega pišemo ili $x+9$ ili broj koji se dobija izbacivanjem cifre 1 sa bilo koje pozicije u broju x. Da li je uvek moguće, počevši od broja A, nakon nekoliko poteza dobiti broj $A+1$? (Ako želimo da obrišemo cifru 1 sa vodeće pozicije, brišemo i sve nule koje slede neposredno nakon te jedinice).
4	2.	Neka je ABC pravougli trougao, sa pravim uglom u temenu C. Nad katetama AC i BC konstruisani su kvadrati $ACKL$ i $BCMN$, u spoljašnjosti trougla ABC. Ako je CE visina trougla ABC, dokazati da je ugao LEM prav.
4	3.	Na šahovskoj tabli, dimenzije 8×8, nalazi se 8 topova, tako da se nikoja dva topa međusobno ne napadaju. Sva polja table podeljena su ovim topovima na sledeći način: polje na kome se nalazi top pripada tom topu; ako neko polje napadaju dva topa, ono pripada onom topu koji je bliži tom polju, a ukoliko je to polje jednako udaljeno od oba topa, svaki top dobija po polovinu tog polja. Dokazati da je svaki top ukupno dobio istu površinu na tabli.
4	4.	Na svakom od 100 tegova nalazi se nalepnica koja pokazuje stvarnu masu tog tega. Nestašni Griša želi da preuredi nalepnice tako da suma brojeva na nalepnicama bilo koje grupe od $k \in \{1, 2, ..., 99\}$ tegova nije jednaka ukupnoj masi tih tegova. Da li Griša uvek može da uspe u svojoj nestašnoj nameri?
5	5.	Kvadratni trinom je *prihvatljiv* ako su mu koeficijenti celobrojni, vodeći koeficijent je jednak 1, apsolutna vrednost koeficijenata ne prelazi 2013 i nule tog kvadratnog trinoma su celi brojevi. Vasa je sabrao sve prihvatljive kvadratne trinome. Dokazati da trinom koji je dobio tom prilikom nema realnih nula.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 10.3.2013.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena.)

poeni	zadaci
4	1. Na tabli se nalazi nekoliko prirodnih brojeva. Suma bilo koja dva broja sa table jednaka je nekom stepenu dvojke. Koliko se najviše različitih brojeva može naći na tabli?
4	2. Dvadesetoro dece, deset dečaka i deset devojčica stoje u vrsti. Svaki dečak je izbrojao koliko se dece nalazi desno od njega i zapamtio taj broj. Svaka devojčica je izbrojala koliko se dece nalazi levo od nje i zapamtila taj broj. Dokazati da je zbir svih brojeva koje su zapamtili dečaci jednak zbiru svih brojeva koje su zapamtile devojčice.
5	3. Data je tabla dimenzije 19×19. Da li je moguće markirati neke kvadratiće dimenzije 1×1 tako da svaki kvadrat dimenzije 10×10 sadrži različit broj markiranih kvadratića?
5	4. 1000 realnih brojeva različitih od nule je poredjano u krug i ofarbano naizmenično crnom i belom bojom. Svaki crni broj je jednak zbiru dva njemu susedna bela broja, dok je svaki beli broj jednak proizvodu dva njemu susedna crna broja. Koje sve vrednosti može imati zbir ovih 1000 brojeva?
6	5. Tačka u (koordinatnoj) ravni čije su obe koordinate celi brojevi se naziva *čvor*. Uočimo trougao čija se temena nalaze u čvorovima i koji sadrži tačno dva čvora u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da prava kroz ta dva čvora ili sadrži teme trougla ili je paralelna sa nekom od stranica trougla.
8	6. Neka je ABC pravougli trougao i neka je I centar upisanog kruga u trougao ABC koji dodiruje njegove katete AC i BC u tačkama B_0 i A_0, redom. Neka se normala iz tačke A_0 na pravu AI i normala iz tačke B_0 na pravu BI seku u tački P. Dokazati da je $CP \perp AB$.
9	7. Dva tima A i B učestvuju na školskom turniru u stonom tenisu. Tim A se sastoji od m učenika a tim B od n učenika gde je $m \neq n$. Postoji samo jedan sto za stoni tenis na kome je moguće igrati i turnir je organizovan na sledeći način. Dva učenika iz različitih timova počnu da igraju meč dok svi ostali učenici formiraju red i čekaju njihov red za igru. Kada se neki meč završi, učenik sa početka trenutnog reda menja člana svog tima koji je igrao u tom meču i igra protiv preostalog igrača (tj. član suprotnog tima nastavlja da igra). Igrač koji je zamenjen ide na kraj reda. Dokazati da će svaka dva učenika iz suprotnih timova u nekom trenutku igrati meč jedan protiv drugog.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 10.3.2013.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena.)

---

poeni	zadaci
3	1. Na tabli se nalazi nekoliko prirodnih brojeva. Suma bilo koja dva broja sa table jednaka je nekom stepenu dvojke. Koliko se najviše različitih brojeva može naći na tabli?
4	2. Na dugačkoj plaži sede jedan dečak i jedna devojčica. Zatim, dvadesetoro dece, jedno za drugim, dođu na plažu i svako dete sedne između dvoje dece koje već sede na plaži. Dete je *hrabro* ukoliko je selo između dvoje dece suprotnog pola od njegovog. Nakon što je i poslednje dete zauzelo svoje mesto, ispostavilo se da dečaci i devojčice sede naizmenično. Da li je moguće jednoznačno odrediti broj hrabre dece među njima?
6	3. U ravni je dat koordinatni sistem. Tačku te ravni nazivamo *čvor* ako su obe koordinate ta tačke celobrojne. Posmatrajmo trougao čija su temena čvorovi i koji sadrži barem dva čvora u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da u unutrašnjosti tog trougla postoje dva čvora takva da prava određena njima prolazi kroz teme trougla ili je paralelna sa jednom stranicom trougla.
6	4. Brojevi $1, 2, ..., 100$ zapisani su na kružnici, u nekom redosledu. Da li je moguće da je za svaka dva susedna broja na kružnici njihova apsolutna vrednost razlike ne manja od 30 i ne veća od 50?
7	5. U ravni su izabrane tri tačke i jednoj je dodeljena crvena, jednoj plava i jednoj žuta boja; ostalim tačkama te ravni nisu dodeljene boje. Jedan korak sastoji se od sledećeg: izaberu se dve tačke kojima su dodeljene različite boje; zatim se odredi još jedna tačka u ravni i njoj se dodeli preostala treća boja tako da sve tri tačke čine temena jednakostraničnog trougla čijim temenima su dodeljene boje, u smeru kazaljke na satu: crvena, plava, žuta. Svakoj tački ravni može da se dodeli više boja. Dokazati da nakon proizvoljnog broja koraka važi: za proizvoljnu boju $x \in \{$crvena, plava, žuta$\}$ sve tačke kojima je dodeljena boja x nalaze se na jednoj pravoj.
	6. Dato je 5 međusobno različitih pozitivnih realnih brojeva. Poznato je da je suma kvadrata ovih brojeva jednaka sumi 10 proizvoda od po dva različita realna broja.
4	a) Dokazati da je moguće izabrati tri realna broja od ovih pet, tako da ne postoji trougao čije su dužine stranica jednake tim brojevima.
5	b) Dokazati da je broj trojki opisanih u delu pod a) barem 6. (Trojke sačinjene od istih brojeva u različitim redosledima smatraju se istim).
	7. Kralj je odlučio da redukuje svoj Savet koji se sastoji od 1000 čarobnjaka. Poređao ih je u niz i stavio im je kape na kojima su bili zapisani brojevi od 1 do 1001 u nekom redosledu (kapu koju nije iskoristio je sakrio). Svaki čarobnjak vidi samo one kape koje se nalaze na glavama čarobnjaka ispred njega. Kada Kralj da znak, počevši od poslednjeg čarobnjaka u nizu, svaki čarobnjak izgovara jedan broj od 1 do 1001, tako da svi ostali čarobnjaci mogu da ga čuju. Ni jedan broj ne sme biti izgovoren dva puta. Svaki čarobnjak koji ne pogodi broj na svojoj kapi biva izbačen iz Saveta. Čarobnjaci su znali za ovaj test i mogli su da dogovore strategiju unapred.
5	a) Da li čarobnjaci mogu da smisle strategiju koja bi garantovala da će više od 500 njih ostati u Savetu?
7	b) Da li čarobnjaci mogu da smisle strategiju koja bi garantovala da će barem 999 njih ostati u Savetu?