34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Лакша јесења варијанта, 7.10.2012.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена)

поени	задатак
3	1. Пет ученика имају имена Цаки, Димитрије, Јанко, Радосав и Стефан, док су њихова презимена (у неком редоследу) Цакић, Димитријевић, Јанковић, Радосављевић и Стефановић. Познато је да је Цаки старији 1 годину од Цакића, Димитрије старији 2 године од Димитријевића, Јанко старији 3 године од Јанковића, Радосав старији 4 године од Радосављевића. Да ли је старији Стефан или Стефановић и за колико?
4	2. Нека је $C(n)$ број простих делилаца природног броја n (нпр. $C(10) = 2, C(11) = 1, C(12) = 2$). Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b)$ коначан или бесконачан?
5	3. У нека јединична поља табле 10×10 постављене су бомбе. Свако јединично поље које нема бомбу, садржи број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страну или ако имају заједничко теме). Након овога направљен је нови распоред - свако поље које није садржало бомбу сада садржи бомбу, док је у свако преостало поље уписан број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (у новом распореду). Да ли је могуће да је збир свих уписаних бројева у новом распореду већи од збира свих уписаних бројева у почетном распореду?
5	4. Кружница додирује странице AB, BC и CD паралелограма $ABCD$, редом, у тачкама K, L и M. Доказати да права KL полови висину паралелограма конструисану из темена C на страницу AB.
5	5. Двадесет ученика неког одељења ишло је на неколико излета. Сваком излету присуствовао је бар један ученик. Доказати да постоји излет такав да је сваки његов учесник учествовао на бар $\frac{1}{20}$ свих излета.

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Лакша јесења варијанта, 7.10.2012.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена)

поени	задатак	
4	1.	У нека јединична поља табле $m \times n$, где су m и n фиксирани природни бројеви, постављене су бомбе. Свако јединично поље које нема бомбу, садржи број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страну или ако имају заједничко теме). Након овога направљен је нови распоред - свако поље које није садржало бомбу сада садржи бомбу, док је у свако преостало поље уписан број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (у новом распореду). Да ли је могуће да је збир свих уписаних бројева у новом распореду већи од збира свих уписаних бројева у почетном распореду?
	2.	Дат је конвексан полиедар и сфера која сече сваку његову ивицу и дели је на три једнака дела. Да ли многоуглови који представљају стране тог полиеадра морају бити
2	а)	подударни
3	б)	правилни?
5	3.	Двадесет ученика неког одељења ишло је на неколико излета. Сваком излету присуствовало је бар четворо ученика. Доказати да постоји излет такав да је сваки његов учесник учествовао на бар $\frac{1}{17}$ свих излета.
	4.	Нека је $C(n)$ број простих делилаца природног броја n.
2	а)	Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b)$ коначан или бесконачан?
3	б)	Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b) > 1000$ коначан или бесконачан?
5	5.	Међу 239 новчића налазе се два лажна. Исправни новчићи имају међусобно једнаке тежине. Лажни новчићи такође имају међусобно једнаке тежине, али се њихова тежина разликује од тежине исправних новчића. Утврдити помоћу три мерења на теразијама (вага без тегова) да ли су лажни новчићи тежи или лакши од исправних.

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 21.10.2012.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена.)

поени	задаци
4	1. За декадни запис неког целог броја користе се само две различите цифре. Познато је да тај број има барем 10 цифара и да су сваке две узастопне цифре међусобно различите. Који је највећи степен двојке који може да дели овај број?
5	2. Чип и Дејл играју следећу игру. На почетку игре, Чип распореди 222 лешника у 2 кутије. Дејл види како су распоређени лешници и бира природан број N из скупа $\{1, 2, ..., 222\}$. Затим, Чип узима додатну трећу кутију (која је празна) и премешта, уколико је то неопходно, неки број лешника из прве две кутије у трећу са циљем да у некој од ове три кутији буде тачно N лешника, или да неке две кутије заједно садрже N лешника. Дејл добија све лешнике који су премештени у трећу кутију. Који је максималан број лешника који Дејл може да добије, без обзира како Чип игра?
6	3. У неким пољима таблице 11×11 уписан је знак плус: $+$. Познато је да је укупан број плусева у целој таблици паран и да је број плусева у свакој 2×2 подтаблици такође паран. Доказати да је укупан број плусева на главној дијагонали ове таблице паран број. (Главна дијагонала је она дијагонала која спаја горње лево и доње десно поље)
7	4. Дат је троугао ABC. Нека је I центар уписаног круга овог троугла, а X, Y, Z центри уписаних кругова троуглова AIB, BIC анд AIC, редом. Центар уписаног круга троугла XYZ поклапа се са тачком I. Да ли из тога обавезно следи да је троугао ABC једнакостраничан?
8	5. Аутомобил се креће по кружној стази у смеру кретања казаљки на часовнику. Тачно у подне, Петар и Павле стали су поред траке, на различитим позицијама, да посматрају аутомобил. Након неког времена, истовремено су напустили своје позиције и упоредили своја запажања. Приметили су да је аутомобил прошао поред сваког од њих барем 30 пута. Поред тога, Петар је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду брже него претходни, а Павле је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду спорије него претходни. Доказати да су они посматрали аутомобил барем један и по сат.
	6.
4	а) Унутар круга уочена је тачка A. Кроз тачку A конструисане су две међусобно нормалне праве које пресецају круг у четири тачке. Доказати да центар маса ове четири тачке не зависи од избора оваквих двеју правих.
4	б) Унутар круга уочен је правилан $2n$-тоугао ($n \geq 2$) са центром у A (A није обавезно и центар круга). $2n$ полуправих које полазе из тачке A и садрже темена овог $2n$-тоугла, пресецају круг у $2n$ тачака. Обележимо са O центар маса ових $2n$ тачака. Затим се овај $2n$-тоугао ротира око тачке A и поново се конструишу нових $2n$ полуправих које полазе из A и садрже темена $2n$-тоугла, које пресецају круг у нових $2n$ тачака. Обележимо са N центар маса ових нових $2n$ тачака. Доказати да је $O = N$.
10	7. Петар и Павле играју следећу игру. На почетку игре, Петар замисли неки природан број a чији је збир цифара једнак 2012. Павле зна да је збир цифара броја a једнак 2012, али жели да погоди који је то број. У сваком потезу, Павле бира природан број x, а Петар му саопштава колики је збир цифара броја $\lvert x - a \rvert$. Колики је минималан број потеза потребан Павлу да би одредио који је број a?

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 21.10.2012.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена.)

поени	задаци	
4	1.	Дат је бесконачни низ реалних бројева $a_1, a_2, a_3, \ldots$ За сваки природан број k постоји природан број $t = t(k)$ тако да је $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Да ли обавезно постоји природан број T тако да је $a_k = a_{k+T}$ за свако $k \in \mathbb{N}$?
5	2.	Чип и Дејл играју следећу игру. На почетку игре, Чип распореди 1001 лешник у 3 кутије. Дејл види како су распоређени лешници и бира природан број N из скупа $\{1, 2, ..., 1001\}$. Затим, Чип узима додатну четврту кутију (која је празна) и премешта, уколико је то неопходно, неки број лешника из прве три кутије у четврту са циљем да у неким кутијама (могһе и само једној), међу овим четири, буде укупно тачно N лешника. Дејл добија све лешнике који су премештени у четврту кутију. Који је максималан број лешника који Дејл може да добије, без обзира како Чип игра?
6	3.	Аутомобил се креће по кружној стази у смеру кретања казаљки на часовнику. Тачно у подне, Петар и Павле стали су поред траке, на различитим позицијама, да посматрају аутомобил. Након неког времена, истовремено су напустили своје позиције и упоредили своја запажања. Аутомобил је прошао поред сваког од њих барем 30 пута. Поред тога, Петар је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду брже него претходни, а Павле је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду спорије него претходни. Доказати да су они посматрали аутомобил барем један и по сат.
8	4.	На страницама AB и BC троугла ABC уочене су тачке C_1 и A_1 редом, различите од темена троугла. Нека је K средина дужи A_1C_1 и I центар уписаног круга троугла ABC. Ако је четвороугао A_1BC_1I тетиван, доказати да је угао $\angle AKC$ туп.
8	5.	Петар и Павле играју следећу игру. На почетку игре, Петар замисли неки природан број a чији је збир цифара једнак 2012. Павле зна да је збир цифара броја a једнак 2012, али жели да погоди који је то број. У сваком потезу, Павле бира природан број x, а Петар му саопштава колики је збир цифара броја $\lvert x - a \rvert$. Колики је минималан број потеза потребан Павлу да би одредио који је број a?
	6.	
5	а)	Унутар сфере уочена је тачка A. Кроз тачку A конструисане су три међусобно нормалне праве које пресецају сферу у шест тачака. Доказати да центар маса ових шест тачака не зависи од избора оваквих правих.
5	б)	Унутар сфере уочен је икосаедар са центром у A (A није обавезно и центар сфере). 12 полуправих које полазе из тачке A и садрже темена овог икосаедра, пресецају круг у 12 тачак чији је центар масе тачка O. Затим се овај икосаедар ротира око тачке A и поново се конструишу нових 12 полуправих које полазе из A и садрже темена икосаедра, које пресецају круг у нових 12 тачака. Обележимо са N центар маса ових нових 12 тачака. Доказати да је $O = N$. (Икосаедар је правилан полиедар са 20 троугаоних страна; из сваког темена полази 5 ивица).
10	7.	Трака димензије $1 \times 1\,000\,000$, сачињена од јединичних поља, подељена је на 100 сегмената. У свако поље уписан је по један цео број, тако да поља која припадају истом сегменту садрже исте бројеве. На свако поље је постављен по један жетон и урађено је следеће: сваки жетон је померен удесно за онолико поља колики је број у пољу на коме је жетон постављен (уколико је у поље био уписан негативан број, жетон се помера улево). Испоставило се да се након ове операције поново на сваком пољу нашао по један жетон. Ова операција је затим понављана много пута. За сваки жетон који је на почетку био постављен на неко поље из првог сегмента, записан је број операција изведених док се тај жетон није први пут вратио на неко поље из првог сегмента. Доказати да међу записаним бројевима, постоје највише 100 различитих.