Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. април 2013.

Први дан

1. Дат је природан број k. Нека је $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ бијекција таква да за свака два цела броја i и j за које је $|i-j| \leqslant k$ важи $|f(i)-f(j)| \leqslant k$. Доказати да за све $i, j \in \mathbb{Z}$ важи

$$|f(i) - f(j)| = |i - j|.$$

2. Нека је

$$S_n = \left\{ \binom{n}{n}, \binom{2n}{n}, \binom{3n}{n}, \ldots, \binom{n^2}{n} \right\}, \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

а) Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да S_n није потпун систем остатака по модулу n.

б) Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да S_n јесте потпун систем остатака по модулу n.

3. Нека су M, N и P средишта страница BC, AC и AB, редом, а O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Кружнице описане око троуглова BOC и MNP секу се у различитим тачкама X и Y унутар троугла ABC. Доказати да је

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle CAY.$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. април 2013.

Други дан

1. Одредити све $n \in \mathbb{N}$ за које је могуће поделити скуп $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ на n дисјунктних трочланих подскупова облика $\{a, b, c\}$ у којима су $b - a$ и $c - b$ различити бројеви из скупа $\{n - 1, n, n + 1\}$.

2. Нека су A' и B' подножја висина из темена A и B, редом, оштроуглог троугла ABC $(AC \neq BC)$. Кружница k садржи тачке A' и B' и додирује страницу AB у тачки D. Ако троуглови ADA' и BDB' имају једнаке површине, доказати да је

$$\sphericalangle A'DB' = \sphericalangle ACB.$$

3. Наћи највећу константу $K \in \mathbb{R}$ са следећим својством: ако су $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ такви да за све $i, j, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i < j < k \leqslant 4$, важи $a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 \geqslant 2(a_i a_j + a_j a_k + a_k a_i)$, онда је

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geqslant K(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4).$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.