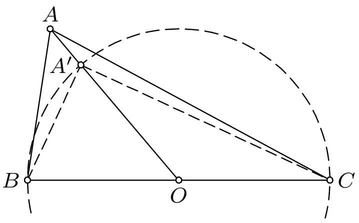
Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Решења задатака

Први разред - А категорија

1. Нека је O средиште странице BC и k кружница са пречником BC. Како је $AO \geqslant AD = BC/2$, то се тачка A не налази унутар кружнице k. Самим тим, кружница k сече дуж AO у тачки A' (могуће је $A = A'$). Сада је $\sphericalangle BA'O = \sphericalangle ABA' + \sphericalangle BAA' \geqslant \sphericalangle BAA'$ и $\sphericalangle CA'O = \sphericalangle ACA' + \sphericalangle CAA' \geqslant \sphericalangle CAA'$. Сабирањем ових неједнакости добијамо $90^\circ = \sphericalangle BA'C \geqslant \sphericalangle BAC$, што је и требало доказати. (Тангента 69, стр. 33, зад. 3)



Оп 2013 1А 1

2. Нека је $P(x) = x^{2011} + 1$. Тада је $P(x) = (x+1)\cdot(x^{2010} - x^{2009} + \ldots - x + 1)$. Зато, одредимо остатак при дељењу полинома $Q(x) = x^{2010} - x^{2009} + \ldots - x + 1$ са $x+1$. Како је $Q(-1) = 2011$, то је по Безуовом ставу $Q(x) = (x+1)\cdot R(x) + 2011$, а самим тим

$$P(x) = (x+1)\cdot((x+1)\cdot R(x) + 2011) = (x+1)^2 \cdot R(x) + 2011(x+1),$$

па је тражени остатак једнак $2011x + 2011$. (Тангента 67, стр. 4, М1014)

3. Докажимо да такав природан број n не постоји. Претпоставимо супротно. Нека је $a \in \mathbb{N}$ највећи степен броја 2 који дели $n!$, тј. $2^a \mid n!$, $2^{a+1} \nmid n!$, а b највећи степен броја 5 који дели $n!$, тј. $5^b \mid n!$, $5^{b+1} \nmid n!$. На основу Лежандрове формуле имамо

$$a = \left[\frac{n}{2^1}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots \text{ и } b = \left[\frac{n}{5^1}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \ldots,$$

где је са $[x]$ означен цео део броја x. Како по услову задатка $10^k \mid n!$ и $10^{k+1} \nmid n!$, то је $k = \min\{a, b\} = b$. Декадни запис броја $\frac{n!}{10^k}$ завршава се низом цифара 2012, те је он дељив са 2^2, а није дељив са 2^3. Отуда мора бити $a - b = 2$. Сада је

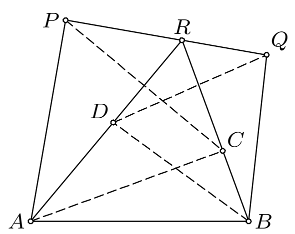
$$2 = a - b \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] \geqslant \frac{n-1}{2} - \frac{n}{5},$$

па је $n \leqslant 8$. Са друге стране, број $n!$ има бар 5 цифара, па је $n \geqslant 8$. Овим смо добили да је $n = 8$. Међутим, како је $8! = 40320$ долазимо до контрадикције.

4. Нека је $AD \cap BC = \{R\}$. Из збира углова троугла ABR закључујемо

$$180^\circ = \sphericalangle RAB + \sphericalangle ABR + \sphericalangle ARB = 120^\circ + \sphericalangle ARB,$$

односно $\sphericalangle ARB = 60^\circ$. Како је $\sphericalangle APC = \sphericalangle ARB$, четвороугао $ACRP$ је тетиван. Одатле је $\sphericalangle PRA = \sphericalangle PCA = 60^\circ$. Аналогно, $\sphericalangle QRB = \sphericalangle QDB = 60^\circ$. Како је $\sphericalangle PRA + \sphericalangle ARB + \sphericalangle QRB = 180^\circ$ то су тачке P, R и Q колинеарне, што је и требало доказати.

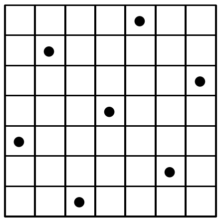


Оп 2013 1А 4

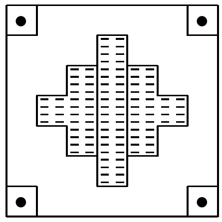
5. Пример на слици 1 показује да је на таблу могуће поставити 7 жетона.

Претпоставимо да се на таблу може поставити 8 жетона. Ако се у сваком углу табле налази по један жетон, преостала 4 жетона се морају налазити у осенченом делу слике 2. Међутим, тај осенчени део се може поделити на три дела (као на слици 2), од којих ни у један не може да стане више од једног жетона. Контрадикција! Ако у неком углу нема жетона, онда нека подтаблица димензије 6×7 (слика 3) садржи барем 7 жетона. Докажимо да је то немогуће. Претпоставимо да је могуће. Тада у свакој врсти имамо бар по један жетон, а у једној од њих (рецимо W) имамо два, и то, према услову задатка, у крајњим пољима. Нека је W_1 њој суседна врста, а W_2 врста различита од W суседна W_1 (слика 3). У W_1 жетон може да се налази само у средњем пољу, али тада у W_2 нема места ни за један жетон. Контрадикција!

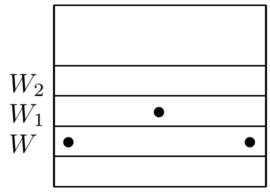
Дакле, на таблу је могуће поставити највише 7 жетона.



Слика 1.



Слика 2.



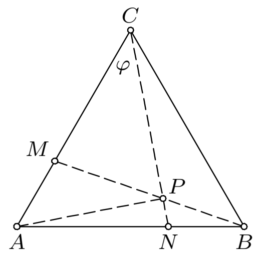
Слика 3.

Други разред - А категорија

1. Нека је $\sphericalangle ACN = \varphi$ и $AB = 3a$. Тада је $\sphericalangle ANC = 120^\circ - \varphi$. Применом синусне теореме на $\triangle ACN$ добијамо $\dfrac{AN}{\sin\varphi} = \dfrac{AC}{\sin(120^\circ - \varphi)}$, па је

$$\frac{3}{2} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2},$$

односно $\operatorname{ctg}\varphi = 2/\sqrt{3}$. Како је $0 < \varphi < \pi/2$, то је $\cos\varphi = 2/\sqrt{7}$ и $\sin\varphi = \sqrt{3}/\sqrt{7}$. Како је $\sphericalangle MBC = \varphi$, то је $\sphericalangle MPC = \sphericalangle PCB + \sphericalangle PBC = 60^\circ$, па је $\sphericalangle CMP = 120^\circ - \varphi$.



Оп 2013 2А 1

Сада, применом синусне теореме на $\triangle MPC$ добијамо $\dfrac{CP}{\sin(120^\circ - \varphi)} = \dfrac{CM}{\sin 60^\circ}$, па је

$$CP = 2a\cdot\left(\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6a}{\sqrt{7}} = AC\cdot\cos\varphi,$$

односно $\sphericalangle APC = 90^\circ$. (Тангента 67, стр. 5, М1019)

2. Нека $\omega \in \mathbb{C}$ има особину да је скуп $S = \{\omega^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан. Како важи $|\omega^n| = |\omega|^n$, то за $|\omega| > 1$ имамо $|\omega| < |\omega^2| < |\omega^3| < \ldots < |\omega^n| < \ldots$, односно скуп S није коначан. Слично, ако је $0 < |\omega| < 1$ имамо $|\omega| > |\omega^2| > |\omega^3| > \ldots > |\omega^n| > \ldots$, па ни у овом случају скуп S није коначан. Дакле, ако је S коначан скуп, онда је $|\omega| = 1$ или $\omega = 0$.

Претпоставимо да број $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ са наведеном особином постоји. Тада на основу претходног дела решења имамо $|z - i| = 1$ или $z - i = 0$, као и $|z + i| = 1$ или $z + i = 0$. Како $z = i$ и $z = -i$ не задовољавају ове услове, то је $|z - i| = |z + i| = 1$. Нека је $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, решење последњег система једначина. Тада је $x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 = 1$, па је $y = 0$ и $x = 0$, односно $z = 0$. Дакле, број $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ са наведеном особином не постоји.

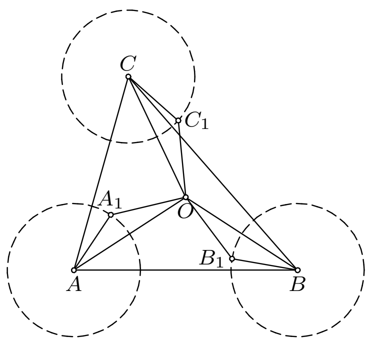
3. Како је $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, то је дата неједнакост еквивалента са

$$-3x^2 - 3x - 3 < f(x) < 3x^2 + 3x + 3.$$

Лева неједнакост је еквивалентна са $4x^2 + (a+4)x + 4 > 0$, која важи за свако $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $D_1 = (a+4)^2 - 64 < 0$, односно $-12 < a < 4$. Десна неједнакост је еквивалентна са $2x^2 + (2-a)x + 2 > 0$, која важи за свако $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $D_2 = (2-a)^2 - 16 < 0$, односно $-2 < a < 6$. Дакле, решења задатка чине скуп $(-2, 4)$. (Тангента 66, стр. 17, М992)

4. Доказаћемо да за произвољну тачку $A_1 \in k_A$ постоје тачке $B_1 \in k_B$ и $C_1 \in k_C$ такве да је троугао $A_1B_1C_1$ сличан, али не и подударан, са троуглом ABC.

Нека је O центар описане кружнице троугла ABC, а A_1 произвољна тачка кружнице k_A. Конструишимо на кружницама k_B и k_C, редом, тачке B_1 и C_1, такве да су $\sphericalangle OBB_1$ и $\sphericalangle OCC_1$ једнаки и исте оријентације као $\sphericalangle OAA_1$ (овакве тачке постоје и јединствено су одређене). Како је $OA = OB$, $\sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle OBB_1$ и $AA_1 = BB_1$, то су троуглови OAA_1 и OBB_1 подударни.



Оп 2013 2А 4

Одавде је $OA_1 = OB_1$ и $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle AOB$, па су троуглови ABO и A_1B_1O слични. Зато је $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Аналогно, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB}$ и $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{OC_1}{OC}$. Из последње три једнакости, имајући на уму да је $OA_1 = OB_1 = OC_1$

и $OA = OB = OC$, добијамо $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$, па су троуглови $A_1B_1C_1$ и ABC слични. Уколико је $OA_1 \neq OA$ ови троуглови неће бити подударни. Како оваквих одабира тачке $A_1 \in k_A$ има бесконачно много, то и тражених одабира има такође бесконачно много.

5. Поље табле у i-том реду и j-тој колони означићемо са (i, j).

Ако је слон на пољу (1,1), очигледно побеђује играч који није на потезу – обележимо то поље са 2. За свако друго поље (i, j) урадимо следеће:

- Ако је бар једно поље на које слон може да дође са поља (i, j) у једном потезу обележено са 2, обележимо поље (i, j) са 1;
- Ако су сва поља на која слон може да дође са поља (i, j) у једном потезу обележена са 1, обележимо поље (i, j) са 2.

Јасно, ако наставимо са оваквим обележавањем, за сва поља која су обележена са 1 знамо да побеђује играч који почиње игру, а за сва поља која су обележена са 2 знамо да други играч побеђује.

На овај начин добијамо табелу на слици 1. Како је доње десно поље означено са 2, закључујемо да други играч има победничку стратегију.

2	1	2	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	1	2	1	2
1	1	2	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	1	2	1
1	1	2	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	1	1	**2**

Слика 1.

Трећи разред - А категорија

1. Како за $w \in \mathbb{C}$ важи $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2 &= \sum_{k=1}^{2011} (z - z_k)\overline{(z - z_k)} = \sum_{k=1}^{2011} (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{2011} (z\overline{z} + z_k\overline{z_k} - z\overline{z_k} - \overline{z}z_k) = \sum_{k=1}^{2011} (|z|^2 + 1 - z\overline{z_k} - \overline{z}z_k) \\ &= 2011(|z|^2 + 1) - z\sum_{k=1}^{2011} \overline{z_k} - \overline{z}\sum_{k=1}^{2011} z_k \\ &= 2011(|z|^2 + 1).\end{aligned}$$

(Тангента 65, стр. 19, М968)

2. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нуле полинома $A(x) = ax^3 + bx + c$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ нуле полинома $B(x) = bx^3 + cx + a$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ нуле полинома $C(x) = cx^3 + ax + b$. На основу Виетових формула за полином $A(x)$ имамо

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) = -2b/a. \tag{1}$$

Аналогно,

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = -2c/b, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = -2a/c. \tag{2}$$

Претпоставимо да су бројеви $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, за $1 \leqslant i \leqslant 3$. Тада из (1) и (2) имамо $-2b/a \geqslant 0$, $-2c/b \geqslant 0$ и $-2a/c \geqslant 0$. Множењем ових неједнакости добијамо $-8 = (-2b/a)(-2c/b)(-2a/c) \geqslant 0$, што је очигледна контрадикција. Овим смо доказали да полином $P(x)$ нема свих 9 реалних нула. Како је он полином са реалним коефицијентима, то је број његових нула које су из $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ паран. Отуда добијамо да $P(x)$ не може имати више од 7 реалних нула. Одредимо сада пример полинома $P(x)$ који има тачно 7 реалних нула. Посматрајмо уређене тројке (a, b, c) за које важи $a + b + c = 0$. Тада је $A(1) = 0$, па је $A(x) = (x - 1)A_1(x)$, где је $A_1(x) = ax^2 + ax - c$. Зато полином $A(x)$ има три реалне нуле ако и само ако је $a^2 + 4ac \geqslant 0$. Аналогно, полином $B(x)$ има три реалне нуле ако и само ако је $b^2 + 4ba \geqslant 0$. За $a = 1$, $b = -4$ и $c = 3$ очигледно су задовољене последње две неједнакости. То нам гарантује да полиноми $A(x)$ и $B(x)$ имају по три реалне нуле. Полином $C(x)$ има нулу $x=1$. Дакле, одабиром $a=1,\ b=-4$ и $c=3$ полином $P(x)$ има 7 реалних нула.

Друго решење. Полином $Q(x)=x^3+px+q,\ p,q\in\mathbb{R}$ има све три реалне нуле ако и само ако је његова дискриминанта $D=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$ непозитивна. Претпоставимо да полином $P(x)$ има 9 реалних нула. Тада би због наведене чињенице важило $\dfrac{c^2}{4a^2}+\dfrac{b^3}{27a^3}\leqslant 0,\ \dfrac{a^2}{4b^2}+\dfrac{c^3}{27b^3}\leqslant 0$ и $\dfrac{b^2}{4c^2}+\dfrac{a^3}{27c^3}\leqslant 0$. Да би наведене неједнакости важине нужно је да важи $\dfrac{b}{a},\dfrac{c}{b},\dfrac{a}{c}\leqslant 0$. Међутим, тада би било $1=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{a}{c}\leqslant 0$, контрадикција. Уколико одаберемо бројеве a, b и c тако да су задовољене неједнакости $\dfrac{c^2}{4a^2}+\dfrac{b^3}{27a^3}\leqslant 0, \dfrac{a^2}{4b^2}+\dfrac{c^3}{27b^3}\leqslant 0$, онда ће полином $P(x)$ имати 7 реалних нула (неједнакости обезбеђују да полином има бар 6 реалних нула, али пошто је непарног степена и има реалне коефицијенте, онда он има непарно много реалних нула). Један такав одабир је $a=1$, $c=3$ и $b=-4$. Овим смо доказали да полином $P(x)$ може имати највише 7 реалних нула.

3. Користићемо следеће тврђење.

Лема. За произвољан ненегативан цео број a неједначина

$$a<2^b-2b$$

има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

Доказ. Докажимо да за $a\geqslant 0$ важи

$$a<2^{a+3}-2(a+3), \tag{$*$}$$

тј. да је једно решење дате неједначине $b=a+3$. Доказ изводимо принципом математичке индукције. Тврђење тривијално важи за $a=0$. Зато, претпоставимо да тврђење важи за a и докажимо да важи и за $a+1$. Тада је

$$2^{a+4}=2\cdot 2^{a+3}>2(3a+6)>3a+9,$$

чиме је тврђење $(*)$ доказано.

Како је за $b\geqslant 3$ испуњено $2^b-2b<2^{b+1}-2(b+1)$, то је и свако $b\geqslant a+3$ решења дате неједначине, па неједначина заиста има бесконачно много решења. $\square$

Уколико број k има прост делилац већи од 7, онда он мора да дели и $P(n)$, па је $P(n)=0$, контрадикција. Дакле, за све бројеве k који имају бар један прост делилац већи од 7, дата једначина нема решења. Доказаћемо да за све остале вредности природног броја k посматрана једначина има бесконачно много решења. Запишимо број k у облику $k=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta$, где су $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$). Посматрајмо број n који у декадном запису има i јединица, $\alpha+j$ двојки, β тројки, γ петица и δ седмица. За овако изабран број n је

$$\begin{aligned}\frac{P(n)}{S(n)}=k\quad &\Longleftrightarrow\quad \frac{1^i\cdot 2^{\alpha+j}\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta}{i+2(\alpha+j)+3\beta+5\gamma+7\delta}=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta\\ &\Longleftrightarrow\quad i+2\alpha+3\beta+5\gamma+7\delta=2^j-2j.\end{aligned}$$

По Леми, неједначина $2\alpha+3\beta+5\gamma+7\delta<2^j-2j$ има бесконачно много решења (по j), па постоји и бесконачно много уређених парова природних бројева (i,j) за које важи

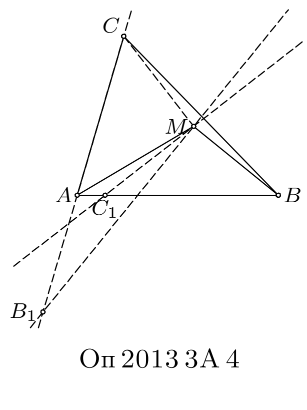
$$i+2\alpha+3\beta+5\gamma+7\delta=2^j-2j.$$

Сваки од ових уређених парова одређује један број n који је решење почетне једначине. Зато, ако број k нема прост делилац већи од 7, посматрана једначина има бесконачно много решења.

4. Тврђење ћемо доказата применом Менелајеве теореме, тј. доказаћемо да важи

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1.$$

Нека је $MA=x$, $MB=y$ и $MC=z$. Можемо претпоставити да се тачке A_1 и C_1 налазе на дужима BC и AB, редом, а да се тачка B_1 налази ван дужи AC (у случају другачијег распореда задатак се аналогно решава). Применом синусне теореме имамо



Оп 2013 3А 4

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BC_1/MC_1}{AC_1/MC_1} = \frac{\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC - 90^\circ)/\sin\sphericalangle MBA}{\sin(90^\circ - \sphericalangle AMB)/\sin\sphericalangle MAB}$$
$$= \frac{\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \sphericalangle AMC)} \cdot \frac{\sin\sphericalangle MAB}{\sin\sphericalangle MBA}$$
$$= \frac{\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \sphericalangle AMC)} \cdot \frac{y}{x}.$$

Аналогно,

$$\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{\sin(90^\circ - \sphericalangle AMC)}{\sin(\sphericalangle AMC + \sphericalangle BMC - 90^\circ)} \cdot \frac{z}{y}.$$

Водећи рачуна о рапореду имамо и

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB_1/MB_1}{CB_1/MB_1} = \frac{\sin(\sphericalangle AMB - 90^\circ)/\sin(\sphericalangle 180^\circ - \sphericalangle CAM)}{\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC - 90^\circ)/\sin\sphericalangle ACM} = \frac{\sin(\sphericalangle AMB - 90^\circ)}{\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC - 90^\circ)} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ACM}{\sin\sphericalangle CAM}$$
$$= \frac{\sin(\sphericalangle AMB - 90^\circ)}{\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC - 90^\circ)} \cdot \frac{x}{z}.$$

Како је $\sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC - 90^\circ + \sphericalangle AMB - 90^\circ = 180^\circ$, то је $\sin(\sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC - 90^\circ) = \sin(\sphericalangle AMB - 90^\circ)$, па тражена једнакост следи множењем добијених израза. (Тангента 64, стр. 15, М962)

5. Приметимо да је могуће изабрати $n+1$ подскуп са траженом особином – довољно је одабрати све подскупове скупа N_n који садрже $n-1$ елемената и скуп N_n.

Претпоставимо да је издвојено $n+2$ подскупова са траженом особином. Тада бар $n+1$ од њих нису једнаки целом скупу N_n. Зато, према Дирихлеовом принципу постоји $k \in N_n$ који се не налази у барем два од њих, па њихова унија није једнака N_n. Контрадикција.

Дакле, може се изабрати највише $n+1$ скуп са траженом особином.

Четврти разред - А категорија

1. Домен дате функције је $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2 \dots, a_n\}$. Како је $\lim_{x\to a_i^\pm} f(x) = \pm\infty$, функција има вертикалну асимптоту у свакој тачки a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Такође је и $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Како је извод дате функције (на домену) једнак $f'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2} < 0$, то је f опадајућа на сваком од интервала (a_i, a_{i+1}), $1 \leqslant i \leqslant n-1$, па по Болцано-Кошијевој теореми на сваком од ових интервала има тачно једну нулу. Како за $x < a_1$ важи $f(x) < 0$, а за $x > a_n$ важи $f(x) > 0$, то f има тачно $n-1$ нулу. (Тангента 67, стр. 6, М1035)

2. Нека је $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = c$. Како за $3 \leqslant k < n+2$ важи $\frac{k}{k+1} < \frac{n+2}{n+3}$, то је $\left(\frac{k}{k+1}\right)^n < c$. Сада за $3 \leqslant k < n+2$ важи

$$\left(\frac{k}{n+3}\right)^n = \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \cdot \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^n \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n < c^{n-k+3},$$

па је

$$(n+3)^n = 3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n < (c^n + c^{n-1} + \ldots + c) \cdot (n+3)^n = \frac{c \cdot (1-c^n)}{1-c} \cdot (n+3)^n < \frac{c}{1-c} \cdot (n+3)^n.$$

Дакле $c > \frac{1}{2}$, односно $\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n < 2$. Нека је $n \geqslant 3$. По биномној формули важи

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n > 1 + \frac{n}{n+2} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} = S,$$

па је према претходном $2 > S$. После сређивања, ово је еквивалентно са $n \leqslant 6$.

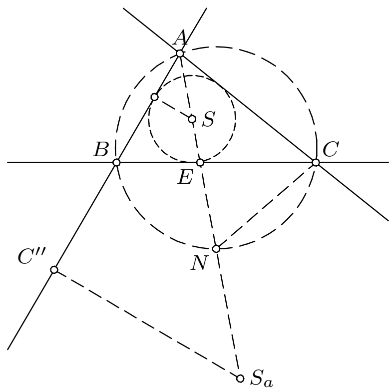
Како је $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, то су $n = 2$ и $n = 3$ решења дате једначине. Такође, $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$ (јер је $3^4 + 4^4 + 5^5 + 6^4 \equiv 2 \pmod 3$, а $7^4 \equiv 1 \pmod 3$), $3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 \neq 8^5$ (јер је $3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5$ непаран, а 8^5 паран) и $3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + 7^6 + 8^6 \neq 9^6$ (јер је $3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + 7^6 + 8^6 \equiv 3 \pmod 4$, а $9^6 \equiv 1 \pmod 4$), па су $n = 2$ и $n = 3$ једина решења дате једначине.

3. За $n > 2013$ међу датим бројевима, по Дирихлеовом принципу, два дају исти остатак при дељењу са 2013, док за $n = a = 2$ нема бројева који дају исти остатак. Зато постоји највећи број n са наведеном особином. Докажимо да за произвољан цео број a важи $a^{61} \equiv a \pmod{2013}$, односно $a^{61} \equiv a \pmod 3$, $a^{61} \equiv a \pmod{11}$ и $a^{61} \equiv a \pmod{61}$. Ако је $(3, a) = 1$, по Малој Фермаовој теореми важи $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, па је $a^{60} \equiv (a^2)^{30} \equiv 1 \pmod{3}$, а тиме и $a^{61} \equiv a \pmod{3}$. Последња једнакост очигледно важи за бројеве a који су дељиви са 3. Слично претходном, ако је $(11, a) = 1$, по Малој Фермаовој теореми имамо $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, па је $a^{61} \equiv (a^{10})^6 \cdot a \equiv a^{61} \pmod{11}$. Уколико $11 \mid a$, очито важи $a^{61} \equiv a \pmod{11}$. Напокон, на основу последице Мале Фермаове теореме, важи $a^{61} \equiv a \pmod{61}$. Дакле, $a^{61} \equiv a \pmod{2013}$ за сваки цео број a, па је $n < 61$. Докажимо да је највећа могућа вредност броја n једнака 60. Довољно је доказати да бројеви $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{60}$ дају различите остатке при дељењу са 2013. Нека је са $r_p(k)$ означен поредак броја a по модулу p. За $r_{61}(2)$ важи $r_{61}(2) \mid 60$, односно $r_{61}(2) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Како је $2^{30} \equiv -1 \pmod{61}$, то је $r_{61}(2) \neq 30$. Ако $r_{61}(2) \mid 30$, онда $1 \equiv (2^{r_{61}(2)})^{\frac{30}{r_{61}(2)}} \equiv 2^{30} \pmod{61}$, контрадикција. Зато је $r_{61}(2) \in \{4, 12, 15, 60\}$. Како је још и $2^4 \equiv 16 \pmod{61}, 2^{12} \equiv 2^{10} \equiv 48 \cdot 4 \equiv 9 \pmod{61}, 2^{15} \equiv 2^{12} \cdot 8 \equiv 72 \pmod{61}$, то је $r_{61}(2) = 60$. Претпоставимо да међу бројевима $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{60}$ постоје нека два која дају исти остатак при дељењу са 2013. Тада $2^x \equiv_{2013} 2^y$, за неке $1 \leqslant x < y \leqslant 60$. Међутим, онда је $1 \equiv 2^{y-x} \pmod{61}$, па важи $60 = r_{61}(2) \mid y - x$. Међутим, $0 < y - x < 60$, контрадикција.

На овај начин смо доказали да је највећа могућа вредност броја n једнака 60.

4. Нека је $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$. Приметимо да је N тачка пресека симетрале $\sphericalangle BAC$ и описане кружнице троугла ABC. Самим тим, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle NAC$, а како је и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ANC$, то је $\triangle ABE \sim \triangle ANC$, па је $\dfrac{AE}{c} = \dfrac{b}{AN}$, односно $AE \cdot AN = bc$.

Нека је C' тачка додира праве AB и кружнице уписане у $\triangle ABC$, а C'' тачка додира праве AB и споља приписане кружнице наспрам A. Тада је $AS = \dfrac{AC'}{\cos(\alpha/2)}$ и $AS_a = \dfrac{AC''}{\cos(\alpha/2)}$, па како је $AC' = \dfrac{b+c-a}{2}$, $AC'' = \dfrac{a+b+c}{2}$ и $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, то је



Оп 2013 4А 4

$$AS \cdot AS_a = \frac{(b+c-a)\cdot(a+b+c)}{4\cdot\cos^2(\alpha/2)} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\cdot(\cos\alpha + 1)} = bc,$$

што је и требало доказати. (Тангента 68, стр. 9, М1037)

5. Доказаћемо да за свако $m \in \mathbb{N}$ важи $L_m = M_{m-3} + M_{m-1}$, тј. да не постоји m са траженом особином. За свако $S \subseteq N_m$, који бројимо у L_m, имамо две могућности:

1° $m \notin S$. Тада је $S \subseteq N_{m-1}$, при чему S не садржи два узастопна природна броја. Самим тим, оваквих скупова S има M_{m-1}.

2° $m \in S$. Тада се у скупу S не могу налазити бројеви 1 и m, па важи $S \setminus \{m\} \subseteq N_{m-2} \setminus \{1\}$, при чему S не садржи два узастопна природна броја. Самим тим, оваквих скупова S има M_{m-3}.

Из 1° и 2° закључујемо да је заиста $L_m = M_{m-3} + M_{m-1}$.

Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМЕМАТИКЕ
Решења задатака

Први разред - Б категорија

1. Природан број n може бити облика $3k$, $3k-1$ или $3k-2$, за неки природан број k. Ако је $n=3k$, тада је $n^2+1=9k^2+1$, што није дељиво са 3. Ако је $n=3k-1$, тада је $n^2+1=(3k-1)^2+1=3(3k^2-2k)+2$, што није дељиво са 3. Ако је $n=3k-2$, тада је $n^2+1=(3k-2)^2+1=3(3k^2-4k+1)+2$, што такође није дељиво са 3. Овим је доказ у потпуности завршен. (Тангента 69, стр. 28, зад. 5)

2. Нека је p прво, а q друго постављено питање, и нека су са $\tau(p)$ и $\tau(q)$ означене истинитосне вредности одговора на ова питања. Размотримо следеће случајеве:
1) Обе особе су виле. Тада је $\tau(p)=\perp$ и $\tau(q)=\perp$.
2) Обе особе су вештице. Тада је $\tau(p)=\perp$ и $\tau(q)=\top$.
3) Особа А је вила, а особа Б вештица. Тада је $\tau(p)=\perp$ и $\tau(q)=\top$.
4) Особа А је вештица, а особа Б вила. Тада је $\tau(p)=\top$ и $\tau(q)=\perp$.

Дакле, да би бродоломник са сигурношћу могао да одреди која особа којој врсти припада, на прво питање одговор мора бити ДА. Ако је на прво питање одговор био НЕ, а бродоломник после другог питања може одредити којој врсти која особа припада, одговор на друго питање је НЕ, односно обе особе су виле.

3. Докажимо да је функција f 1-1. Нека је $f(a)=f(b)$. Ако је $a,b\leqslant -2$, тада је $-a-1=-b-1$, па је $a=b$. Ако је $a,b>-2$, тада је $\dfrac{a-3}{a+2}=\dfrac{b-3}{b+2}$, односно $ab-3b+2a-6=(a-3)(b+2)=(b-3)(a+2)=ba-3a+2b-6$, тј. $a=b$. Ако је $a\leqslant -2$ и $b>-2$, тада је $-a-1=\dfrac{b-3}{b+2}$, односно $b-3=(-a-1)(b+2)=-ab-b-2a-2$, тј. $0=ab+2a+2b-1=a(b+2)+2(b+2)-5=(a+2)(b+2)-5$. Међутим, $a+2\leqslant 0$ и $b+2>0$, па је $(a+2)(b+2)-5<-5$, односно овај случај није могућ. Слично доказујемо и да случај $a>-2$ и $b\leqslant -2$ није могућ. Дакле, ако је $f(a)=f(b)$ тада је $a=b$, па је f 1-1.

Докажимо да је функија f *на*. Ако је $b\geqslant 1$, тада је $-b-1\leqslant 2$, па је $f(-b-1)=-(-b-1)-1=b$. Ако је $b<1$ одредимо $a>-2$ тако да је $f(a)=b$, тј. $\dfrac{a-3}{a+2}=b$. Последње је еквивалентно са $\dfrac{a+2-5}{a+2}=1-\dfrac{5}{a+2}=b$, односно $a=\dfrac{5}{1-b}-2=\dfrac{3+2b}{1-b}>-2$. Дакле, за свако $b\in\mathbb{R}$ постоји $a\in\mathbb{R}$ тако да је $f(a)=b$, па је f *на*.

Из претходног закључујемо да је f бијекција и да је

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x-1, & x\geqslant 1\\ \dfrac{3+2x}{1-x}, & x<1\end{cases}$$

(Тангента 65, стр. 36, зад. 4)

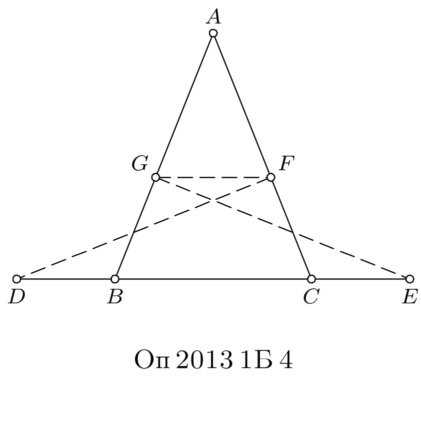
4. Како је $DB=CE$, то је $DC=DB+BC=CE+BC=EB$. Троугао ABC је једнакокраки, па је $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACB$. Како је $DC=EB$, $\sphericalangle BGE=\sphericalangle CFD=90^\circ$ и $\sphericalangle EBG=\sphericalangle DCF$, то је $\triangle BGE\cong\triangle CFD$. Самим тим, $FC=GB$, па је и

$$AG=AB-GB=AC-FC=AF,$$

тј. $\triangle AGF$ је једнакокраки. Сада је

$$180^\circ=\sphericalangle AGF+\sphericalangle AFG+\sphericalangle GAF=2\cdot\sphericalangle AGF+\sphericalangle BAC,$$
$$180^\circ=\sphericalangle ABC+\sphericalangle BCA+\sphericalangle BAC=2\cdot\sphericalangle ABC+\sphericalangle BAC,$$

па је $\sphericalangle AGF=\sphericalangle ABC$, односно $FG\parallel BC$. (Тангента 62, стр. 36, зад. 5)



Оп 2013 1Б 4

5. Двоцифрени бројеви дељиви са 13 су 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, а дељиви са 7 су 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91. Од ових бројева једино 78 садржи цифру 7 и испуњава услове задатка, па је $C_1=7$ и $C_2=8$. Како је од ових бројева једино броју 84 цифра десетица 8, то је $C_3=4$. Сада је $C_4=2$ или $C_4=9$. Размотримо зато следећа два случаја.

1° $C_4=2$. Тада је $C_5=1$ или $C_5=6$. Ако је $C_5=1$, тада је $C_6=3$. Сада је $C_7=5$ (јер не може бити $C_7=9$), па је $C_8=6$. Међутим, тада није могуће изабрати C_9. Нека је зато $C_5=6$. Тада је $C_6=3$ (јер не може бити $C_6=5$), па C_7 може бити једнако 5 или 9. Међутим, за $C_7=5$ није могуће изабрати C_8, па је $C_7=9$ и самим тим $C_8=1$. Међутим, у овом случају C_9 није могуће изабрати.

2° $C_4=9$. Тада је $C_5=1$, па је $C_6=3$ и $C_7=5$. Сада је $C_8=2$ или $C_8=6$. Ако је $C_8=2$, тада је $C_9=6$. Ако је $C_8=6$, тада C_9 није могуће изабрати.
Дакле, једино решење задатка је број 784913526.

Други разред - Б категорија

1. Нека је $a=\sqrt[3]{\dfrac{23+\sqrt{513}}{4}}$ и $b=\sqrt[3]{\dfrac{23-\sqrt{513}}{4}}$. Тада је $a^3+b^3=\dfrac{23}{2}$ и

$$ab=\sqrt[3]{\frac{(23+\sqrt{513})(23-\sqrt{513})}{16}}=\sqrt[3]{\frac{23^2-513}{16}}=1.$$

Сада, кубирањем израза $3x+1=a+b$ добијамо

$$27x^3+27x^2+9x+1=a^3+b^3+3ab(a+b)=\frac{23}{2}+3(3x+1)=\frac{29}{2}+9x,$$

па је $2x^3+2x^2+1=2$.

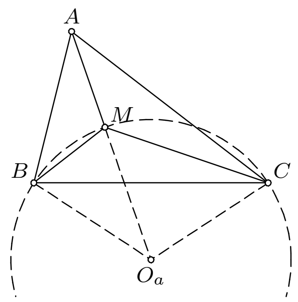
2. Дата неједначина еквивалентна је са $-1<20x-20x^2<1$, односно $20x^2-20x-1<0$ и $20x^2-20x+1>0$. Дискриминанта прве неједначине једнака је $D_1=480$, а друге $D_2=320$. Самим тим решења прве неједначине чине скуп $\left(\frac{5-\sqrt{30}}{10},\frac{5+\sqrt{30}}{10}\right)$, а друге скуп $\left(-\infty,\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)\cup\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10},+\infty\right)$. Дакле, решења дате једначине чине скуп $\left(\frac{5-\sqrt{30}}{10},\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)\cup\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10},\frac{5+\sqrt{30}}{10}\right)$. (Тангента 66, стр. 37, зад. 5)

3. Нека је тражени број n. По услову задатка је $n=3^2\cdot5\cdot m$. Ако је n дељив неким простим бројем $p\notin\{3,5\}$, тада n има барем 12 различитих делилаца $1,3,5,9,15,45\,p,3p,5p,9p,15p,45p$. Дакле, n је облика $3^k\cdot5^l$, за неко $k\geqslant2$ и $l\geqslant1$. Приметимо да су делилоци броја n тачно бројеви облика $3^a\cdot5^b$, за $0\leqslant a\leqslant k$ и $0\leqslant b\leqslant l$, па n има $(k+1)(l+1)$ делилаца. По услову задатка је $(k+1)(l+1)=5\cdot2$, па је $k=4$ и $l=1$, односно $n=3^4\cdot5=405$. (Тангента 68, стр. 31, зад. 2)

4. Неко је O_a центар кружнице описане око $\triangle BMC$. Тада је $\sphericalangle BO_aM=2\cdot\sphericalangle BCM$, а из троугла BMO_a, $180^\circ=2\cdot\sphericalangle BMO_a+\sphericalangle BO_aM$. Дакле,

$$\sphericalangle BMO_a=90^\circ-\sphericalangle BCM,$$

па је $\sphericalangle BMA=180^\circ-\sphericalangle BMO_a=90^\circ+\sphericalangle BCM$. Аналогно (посматрањем кружнице описане око $\triangle AMC$) добијамо $\sphericalangle AMB=90^\circ+\sphericalangle ACM$, па је $\sphericalangle BCM=\sphericalangle ACM$, тј. CM је симетрала угла BCA. Слично доказујемо да су AM и BM симетрале углова BAC и ABC, редом, па је M центар уписане кружнице $\triangle ABC$.



Оп 2013 2Б 4

5. Троцифрених бројева чије су све цифре непарне има $5^3=125$. При томе свака цифра се појављује по 25 пута као цифра јединица, 25 пута као цифра десетица и 25 пута као цифра стотина у овим бројевима, па је тражени збир једнак

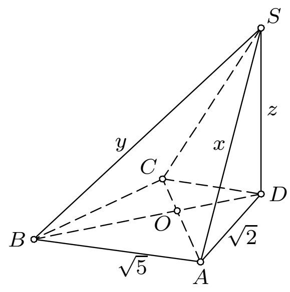
$$25\cdot(1+3+5+7+9)\cdot(1+10+100)=69375.$$

(Тангента 66, стр. 38, зад. 1)

Трећи разред - Б категорија

1. Нека је O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Како је $ABCD$ делтоид, то је O средиште дужи AC и $AC\perp BD$. Самим тим, $AO=1$, па применом Питагорине теорема на троуглове AOB и AOD, добијамо $1+BO^2=5$ и $1+DO^2=2$, односно $BD=3$. Нека је $SA=SC=x$, $SB=y$ и $SD=z$.

Применом Питагорине теореме на троуглове ADS и BDS добијамо $2+z^2=x^2$ и $9+z^2=y^2$. Одузимањем прве од ових једначина од друге добијамо $7=y^2-x^2=(y-x)(y+x)=(y-x)(2+\sqrt{5})$, односно $y-x=7\cdot\sqrt{5}-14$. Како је $x+y=2+\sqrt{5}$, решавањем овог система добијамо $x=8-3\sqrt{5}$ и $y=4\sqrt{5}-6$. Дакле, $z=\sqrt{x^2-2}=\sqrt{107-48\sqrt{5}}$, па како је површина четвороугла $ABCD$ једнака $\dfrac{AC\cdot BD}{2}=\dfrac{3}{2}$ (јер су му дијагонале нормалне), то је тражена запремина једнака $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{107-48\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{107-48\sqrt{5}}}{2}$.
(Тангента 69, стр. 12, М1066)



Оп 2013 3Б 1

2. Детерминанте овог система су

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-2&-2\\3&2&b\end{vmatrix}=2-b,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&-2&-2\\4&2&b\end{vmatrix}=-ab+2a-2b+4,$$
$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&a&-2\\3&4&b\end{vmatrix}=-ab-3a+b-2,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-2&a\\3&2&4\end{vmatrix}=a.$$

Размотримо зато следеће случајеве.

1° $\Delta=0$, тј. $b=2$. Тада је $\Delta_x=0$, $\Delta_y=-a$, $\Delta_z=a$, па имамо следећа два подслучаја.

1.1° $a\neq 0$. Једначина нема решења.

1.2° $a=0$. У овом случају је $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, па систем решавамо Гаусовим методом елиминације. Полазни систем је еквивалентан са

$$\begin{aligned}x+y+z&=1,\\-y-z&=1,\\0&=0.\end{aligned}$$

Дакле, z је слободна промењљива, тј. $z=t$ за $t\in\mathbb{R}$. Даље, из друге и прве једначине редом добијамо $y=-1-t$ и $x=2$. Скуп решења једначине у овом случају је $\{(2,-1-t,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

2° $\Delta\neq 0$, тј. $b\neq 2$. У овом случају једначина има јединствено решење, $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, односно $(x,y,z)=\left(a+2,\dfrac{ab-3a+b-2}{2-b},\dfrac{a}{2-b}\right)$.

(Тангента 66, стр. 17, М996)

3. За $n\geqslant 1$ је $2^n\geqslant 2$, па је $2^{2^n}-4=4\cdot(2^{2^n-1}-1)$, односно дати број је дељив са 4. Такође, број $2^{2^n}=(2^{2^{n-1}})^2$ није дељив са 3, па како је потпун квадрат, даје остатак 1 при дељењу са 3. Самим тим, дати број је дељив и са 3, чиме је доказ завршен. (Тангента 67, стр. 27, зад. 5)

4. Нека је $\sphericalangle CAB=\varphi$. Применом косинусне теореме на $\triangle ADE$, добијамо

$$\cos\varphi=\frac{AD^2+AE^2-ED^2}{2\cdot AD\cdot AE}=\frac{(21-m)^2+m^2-m^2}{2m\cdot(21-m)}=\frac{21-m}{2m}.$$

Сада, применом косинусне теореме на $\triangle ABC$ добијамо

$$n^2=33^2+21^2-2\cdot 33\cdot 21\cdot\frac{21-m}{2m}=2223-\frac{3^3\cdot 7^2\cdot 11}{m}.$$

Како је $m<21$ (јер је $EC<AC$), то је $m\in\{3,7,9,11\}$. Провером ових вредности добијамо да су једина решења $m=7$, $n=12$ и $m=11$, $n=30$.

5. Приметимо да се два ловца која се налазе у истој врсти не нападају. Како је ловаца 33, а врста 8, то се, по Дирихлеовом принципу, у барем једној врсти налази 5 ловаца. Дакле, довољно је уклонити преосталих 28 ловаца.

Четврти разред - Б категорија

1. На интервалима $(-\infty, 0)$, $(0,2)$ и $(2,+\infty)$ функција је непрекидна, тако да је довољно одредити бројеве a и b тако да функција буде непрекидна у тачкама 0 и 2. Приметимо да је $f(0)=2b$, $f(2)=4b^2+4b$ и $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$, па због непрекидности у тачки 2 важи $4b^2+4b=-1$, односно $b=-1/2$. Самим тим, због непрекидности у тачки 0 је $a \neq 0$, па је

$$-1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{4x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\frac{a}{4} = \frac{a}{4},$$

односно $a=-4$. Дакле, $(a,b) = \left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$. (Тангента 65, стр. 19, М973)

2. Уведимо смену $t=x^3$. Тада је $t^2-2t+4=0$, па је $t_{1,2} = 1\pm i\sqrt{3}$. Запишимо ове бројеве у тригонометријском облику. Како је $|t_{1,2}|=2$, то је

$$t_1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), \quad t_2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

па је довољно решити једначине

$$x^3 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad x^3 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Решења ових једначина су

$$\begin{aligned} x_{1,2,3} &= \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ 0\leqslant k\leqslant 2,\\ x_{4,5,6} &= \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ 0\leqslant k\leqslant 2, \end{aligned}$$

па су решења полазне једначине x_i, $1\leqslant i\leqslant 6$. (Тангента 68, стр. 28, зад. 4)

3. Приметимо да важи

$$p = x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2x+2)\cdot(x^2-2x+2).$$

Како је p прост број, а $x^2+2x+2>1$, то је $x^2-2x+2=1$, односно $x=1$, а $p=5$.

4. Принципом математичке индукције ћемо доказати да важи

$$\underbrace{(\ldots((2013\star 2013)\star 2013)\ldots\star 2013)\star 2013}_{n} = \frac{2013}{n}.$$

За $n=1$ тврђење тривијално важи. Претпоставимо да тврђење важи за n и докажимо да важи и за $n+1$. Имамо

$$\underbrace{(\ldots(2013\star 2013)\ldots\star 2013)\star 2013}_{n+1} = \underbrace{(\ldots(2013\star 2013)\ldots\star 2013)}_{n}\star 2013 = \frac{2013}{n}\star 2013 = \frac{\frac{2013}{n}\cdot 2013}{\frac{2013}{n}+2013} = \frac{2013}{n+1}.$$

Дакле, вредност датог израза једнака је 1.

5. Из Виетових формула за полином $p(x)$ добијамо

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= \quad 0,\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= \quad -2,\\ x_1x_2x_3 &= \quad -2010. \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = 4,\\ x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2 &= (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) = 4,\\ x_1^2x_2^2x_3^2 &= (x_1x_2x_3)^2 = 2010^2, \end{aligned}$$

па како је из Виетових формула за полином $q(x)$

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= \quad -a,\\ x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2 &= \quad b,\\ x_1^2x_2^2x_3^2 &= \quad -c, \end{aligned}$$

то је $a=-4$, $b=4$ и $c=-2010^2$. (Тангента 64, стр. 39, зад. 8)