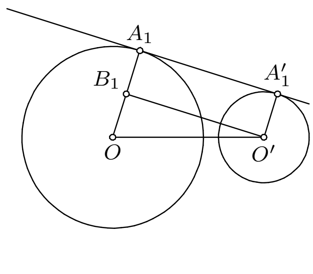
Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

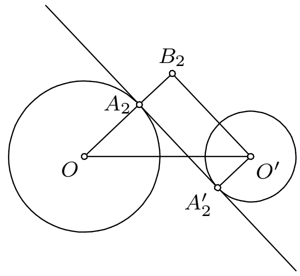
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Решења задатака

Први разред - А категорија

1. Нека су дате кружнице k, са центром O и полупречником R, и k', са центром O' и полупречником r, где је $R \geqslant r$.
Анализа. Нека заједничка спољашња тангента t_1 додирује кружнице k и k' у тачкама A_1 и A_1', редом. Изаберимо тачку B_1 на дужи A_1O тако да је $A_1B_1 = A_1'O'$ (тада је $OB_1 = R - r$). Како је $A_1O \parallel A_1'O'$ и $A_1B_1 = A_1'O'$, четвороугао $A_1A_1'O'B_1$ је правоугаоник, па је $\sphericalangle OB_1O' = 90°$.
Нека заједничка унутрашња тангента t_2 додирује кружнице k и k' у тачкама A_2 и A_2', редом. Изаберимо тачку B_2 на правој A_2O тако да је $A_2B_2 = A_2'O'$ и да важи распоред $O - A_2 - B_2$ (тада је $OB_2 = R + r$). Како је $A_2O \parallel A_2'O'$ и $A_2B_2 = A_2'O'$, четвороугао $A_2A_2'O'B_2$ је правоугаоник, па је $\sphericalangle OB_2O' = 90°$.
Конструкција. Конструишимо кружницу l над пречником OO'. Констуишимо кружнице l_1 и l_2 са центром O и полупречницима $R-r$ и $R+r$, редом. Нека су B_1 и B_1' тачке пресека кружница l и l_1, а B_2 и B_2' тачке пресека кружница l и l_2. Нека су A_1, C_1, A_2, C_2 пресеци полуправих OB_1, OB_1', OB_2, OB_2' са кружницом k, редом. Конструишимо праве t_i и t_i', $i \in \{1, 2\}$, тако да је $t_i \perp A_iO$ и $t_i' \perp C_iO$. Праве t_1, t_2, t_1' и t_2' су заједничке тангенте кружница k_1 и k_2.
Доказ. Следи из анализе.
Дискусија. Уколико је једна кружница унутар друге, тј. $OO' < R - r$, задатак нема решења, а иначе постоје тачно четири заједничке тангенте ових кружница.
(Тангента бр. 67, стр. 4, М1012)



Ок 2013 1А 1а



Ок 2013 1А 1б

2. Задатак ћемо решити индукцијом по броју n. За $n = 2$ нумеришимо победничку екипу бројем 1, а ону која је изгубила у међусобном дуелу бројем 2. Претпоставимо зато да тврђење важи за произвољних $n \geqslant 2$ екипа и докажимо да одатле следи и за $n + 1$ екипа. Одаберимо произвољну екипу X међу тих $n + 1$ и нумеришимо преосталих n према индуктивној претпоставци бројевима од 1 до n. Ако је екипа X изгубила све мечеве можемо је нумерисати бројем $n + 1$ и за ових $n + 1$ екипа ће важити услови задатка. Претпоставимо зато да је екипа X победила бар једном и нека је j број којим је нумерисан тим са најмањим индексом међу онима који су изгубили од ове екипе. Сада, тимове који су били нумерисани бројевима j до n, нумеришимо бројевима $j + 1$ до $n + 1$, редом, екипама нумерисаним од 1 до $j - 1$ (ако је $j > 1$) задржимо нумерацију, а екипу X нумеришимо са j. Како је екипа нумерисана са $j - 1$ (ако је $j > 1$) победила екипу X, услови задатка су испуњени и доказ је завршен. (Тангента 67, стр. 5, М1018)

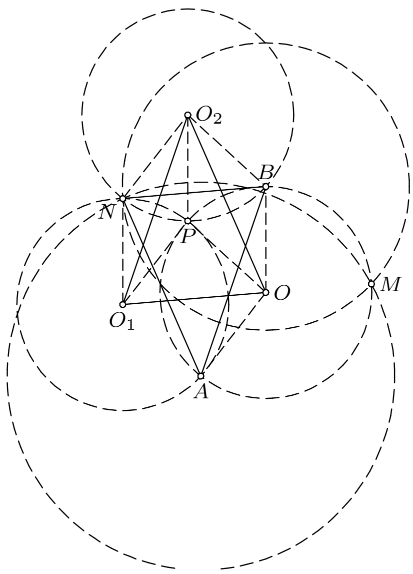
3. Претпоставимо прво да је $x \geqslant 7$. Тада лева страна једначине даје остатак 6 при дељењу са 7. Међутим, како квадрат ниједног природног броја не даје остатак 6 при дељењу са 7 (могући остаци су: $0^2 = 0$, $(\pm1)^2 = 1$, $(\pm2)^2 = 4$ и $(\pm3)^2 \equiv 2 \pmod 7$), у овом случају једначина нема решења. Преостаје још да се испитају случајеви $1 \leqslant x \leqslant 6$. Директном провером се установљава да су решења $(x, y) \in \{(4, 10), (5, 14)\}$ (тада имамо $4! + 76 = 24 + 76 = 100 = 10^2$ и $5! + 76 = 120 + 76 = 196 = 14^2$).

4. Користићемо следеће тврђење:

> Нека су γ_1 и γ_2 кружнице са центрима C_1 и C_2, редом, које се секу у тачкама X и Y. Тада је $\sphericalangle C_1XC_2 = \sphericalangle C_1YC_2$, $\sphericalangle XC_1C_2 = \sphericalangle YC_1C_2$ и $\sphericalangle XC_2C_1 = \sphericalangle YC_2C_1$.

Нека су O_1, O_2 и O центри кружница k_1, k_2 и k, редом, а M, $M \neq N$, тачка пресек кружница k_A и k_B. Троуглови NO_1P и NO_2P су подударни и једнакокраки, па је $O_1N \parallel O_2P$. Слично, троуглови POB и PO_2B су подударни и једнакокраки, па је $O_2P \parallel OB$, односно из претходног $O_1N \parallel OB$. Како је и $O_1N =$

OB, то је четвороугао O_1OBN паралелограм, па је $OO_1 = BN$. Аналогно је $OO_2 = AN$ и $O_1O_2 = AB$, па су троуглови ABN и O_2O_1O подударни. Из ове подударности је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle O_2OO_1$. Даље, применом наведеног тврђења, имамо $\sphericalangle POO_2 = \sphericalangle BOO_2$ и $\sphericalangle POO_1 = \sphericalangle AOO_1$, па је $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle O_1OO_2 = 2\sphericalangle ANB$. Поновном применом наведеног тврђења је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB$, па је $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle AMB$. Самим тим, како се тачке O и M налазе са исте стране праве AB, M се налази и на кружници k, чиме је доказ завршен.



Ок 2013 1А 4

5. Нека је са a_{ij} означен број који је записан у пољу које се налази у i-том врсти и j-том колони.

За сваки паран број n следећа таблица је савршена:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases},$$

јер је тада $k_i = -1$ и $v_i = 1$, за $1 \leqslant i \leqslant n$.

Нека је n непаран број. Из $k_1 + \ldots + k_n + v_1 + \ldots + v_n = 0$ следи да је тачно n од бројева $k_1, \ldots, k_n, v_1, \ldots, v_n$ једнако 1 и тачно n једнако -1. То значи да је $k_1k_2 \cdot \ldots \cdot k_nv_1v_2 \cdot \ldots \cdot v_n = (-1)^n = -1$. Ово је немогуће, јер је $k_1k_2 \cdot \ldots \cdot k_nv_1v_2 \cdot \ldots \cdot v_n = P^2 = 1$, где је са P означен производ свих бројева таблице.

Савршена таблица постоји ако и само ако је n паран број.

Други разред - А категорија

1. Претпоставимо да је $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in (2/3, 9)$. Приметимо да x није облика $\pi/2 + k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, јер је у супротном $\operatorname{tg} 2x = 0$. Дакле, $\operatorname{tg} x$ је дефинисано, па важи $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. Такође, $\operatorname{ctg} 3x \neq 0$, па је и $\operatorname{tg} 3x$ дефинисан и по адиционим формулама важи $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$. Нека је

$$y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x} = \frac{2 - 6\operatorname{tg}^2 x}{3 - 4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x} = \frac{2 - 6m}{3 - 4m + m^2} \in \left(\frac{2}{3}, 9\right),$$

где је $m = \operatorname{tg}^2 x$. Тада је

$$y \cdot m^2 + (6 - 4y) \cdot m + (3y - 2) = 0. \qquad (*)$$

Према претходном, квадратна једначина $(*)$ (по m) има ненегативно решење. Дакле, $D = (6 - 4y)^2 - 4y(3y - 2) \geqslant 0$, односно $4y^2 - 40y + 36 \geqslant 0$. Решавањем ове квадратне неједначине добијамо да је $y \geqslant 9$ или $y \leqslant 1$, па је према претходном $y \in (2/3, 1]$. Међутим, тада је $y > 0$, $6 - 4y > 0$ и $3y - 2 > 0$, па је по Виетовим формулама збир решења једначине $(*)$ негативан, а производ позитиван, а самим тим оба решења су негативна. Контрадикција.

2. Нека је $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Изведимо формулу за полупречник споља приписане кружнице троугла. Нека су са S и S_a означени центри уписане и споља приписане кружнице страници BC троугла ABC, редом, а са S' и S'_a подножја нормала ових тачака на праву AB, редом. Троуглови ASS' и $AS_aS'_a$

су слични, па је $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{AS'}{AS'_a} = \dfrac{(b+c-a)/2}{(a+b+c)/2} = \dfrac{b+c-a}{a+b+c}$. Како је $2S = r(a+b+c)$, где је S површина троугла ABC, то је $r_a = \dfrac{2S}{b+c-a}$.

Нека је $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла ABC. Из претходног закључујемо да је десна страна тражене неједнакости једнака

$$D = \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2}{S^2}.$$

Даље, по неједнакости између квадратне и аритметичке средине је

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \geqslant \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-a),$$

па је

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) = \frac{(p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

По Хероновом обрасци је $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, па тражена неједнакост следи на основу неједнакости

$$(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \geqslant (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a).$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$. (Тангента 66, стр. 19, М1011)

3. Докажимо да број $n = 5$ има својство описано у задатку, тачније да је једино решење једначине $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 5x_5^4$ петорка $(0,0,0,0,0)$. Претпоставимо да постоји неко решење за које је $x_5 \neq 0$. Нека је d највећи заједнички делилац бројева x_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и нека је $x_i = x'_i \cdot d$, $1 \leqslant i \leqslant 5$. Дељењем једначине са d^4, добијамо једначину

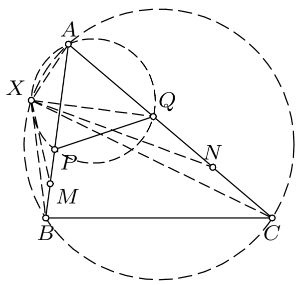
$$x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 + x_4'^4 = 5 \cdot x_5'^4,$$

при чему је НЗД$\,(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5) = 1$. Како је $(\pm 2)^4 \equiv 1 \pmod 5$, $(\pm 1)^4 \equiv 1 \pmod 5$, $0^4 \equiv 0 \pmod 5$, закључујемо да четврти степен ма ког целог броја при дељењу са 5 даје остатак 0 или 1. Одавде имамо да је збир $x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 + x_4'^4$ дељив са 5 једино ако су сви бројеви x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 дељиви са 5. Међутим, тада $5^4 \mid x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 + x_4'^4 = 5x_5'^4$, одакле $5 \mid x'_5$. Овим смо добили да су бројеви x'_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, дељиви са 5, па њихов највећи заједнички делилац није 1, што је контрадикција.

4. Нека је X, $X \neq A$, пресечна тачка кружница описаних око $\triangle APQ$ и $\triangle ABC$. Тада је $\sphericalangle XPA = \sphericalangle XQA$ и $\sphericalangle XBA = \sphericalangle XCA$ што значи да је $\triangle XBP \sim \triangle XCQ$. Сада имамо

$$\frac{BM}{CN} = \frac{BP/2}{CQ/2} = \frac{BP}{CQ} = \frac{XB}{XC}$$

што заједно са $\sphericalangle XBM = \sphericalangle XCN$ даје $\triangle XBM \sim \triangle XCN$. Закључујемо да је $\sphericalangle XMA = \sphericalangle XNA$, па тачка X припада кружници описаној око $\triangle AMN$.



Ок 2013 2А 4

5. Докажимо да је тражено могуће ако и само ако је n паран број.

Претпоставимо да је n непаран и да је тражено могуће. Тада је укупан број поздрављања $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Како је сваки језик употребљен једнак број пута, то је сваки језик употребљен по $\dfrac{n}{2}$ пута, што није цео број. Контрадикција.

Докажимо да је тражено могуће уколико је n паран број. Нумеришимо учеснике скупа бројевима од 1 до n. Нека су се учесници нумерисани са a и b, где $n \notin \{a, b\}$, поздравили језиком који је конгруентан са $a + b$ по модулу $n - 1$, а учесници a и n, $a \neq n$, поздравили језиком који је конгруентан са $2a$ по модулу $n - 1$. Тада се учесник нумерисан са a, за $a \neq n$, поздравио на језицима који су по модулу $n - 1$ конгруентни са $a + i$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, па како ови бројеви дају различите остатке при дељењу са $n - 1$, то се учесник нумерисан са a поздравио на свих $n-1$ језика. Учесник нумерисан са n поздравио се на језицима који су по модулу $n - 1$ конгруентни са $2i$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, па како ови бројеви дају различите остатке при дељењу са $n - 1$, то се и учесник нумерисан са n поздравио на свих $n - 1$ језика.

Трећи разред - А категорија

1. Приметимо да за функцију $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинисану са $f(x)=\sin^2 x$ важи $f(\mathbb{R})=[0,1]$. Зато је

$$(\forall x\in\mathbb{R})(\sin^{2n}x+c\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^{2n}x=1)\Leftrightarrow(\forall y\in[0,1])(y^n+cy(1-y)+(1-y)^n-1=0).$$

Посматрајмо полином $P(y)=y^n+cy(1-y)+(1-y)^n-1$. Ако је $P(y)=0$ за свако $y\in[0,1]$, то полином P има бесконачно много нула, па је P нула полином. Обрнуто, ако је P нула полином важи $P(y)=0$, за све $y\in[0,1]$. Дакле, тражена константа c постоји акко $P(y)\equiv 0$. Посматрајмо најпре случај $n>3$. На основу биномне формуле закључујемо да је за парне бројеве n степен полинома P једнак n, а за непарне бројеве n једнак $n-1$. Овим смо доказали да за $n>3$ полином $P(y)$ није нула полином, па c не постоји. Остаје да размотримо случајеве $n\in\{1,2,3\}$. За $n=1$ имамо $P(y)=-cy^2+cy$, што је нула полином акко је $c=0$. За $n=2$ имамо $P(y)=(2-c)y^2+(c-2)y$, што је нула полином акко је $c=2$. За $n=3$ имамо $P(y)=(3-c)y^2+(c-3)y$, што је нула полином акко је $c=3$.

Дакле, c постоји ако и само је $n\leqslant 3$.

Друго решење. Да би тражена једнакост важила за свако $x\in\mathbb{R}$, она мора важити и за $x=\pi/4$ и $x=\pi/3$. Заменом ових вредности редом добијамо

$$c=4-\frac{1}{2^{n-3}},\qquad c=\frac{1}{3}\cdot\left(16-\frac{3^n+1}{4^{n-2}}\right).$$

Зато, за постојање тражене константе c потребно је да важи $12-\dfrac{3}{2^{n-3}}=16-\dfrac{3^n+1}{4^{n-2}}$. Сређивањем последње једнакости добијамо

$$3^n+1=2^{2n-2}+3\cdot 2^{n-1}.\tag{$*$}$$

Како за $n\geqslant 5$ важи неједнакост $2^{2n-2}>3^n$ (што се може доказати принципом математичке индукције) и $3\cdot 2^{n-1}>1$, то је за $n\geqslant 5$ у $(*)$ лева страна већа од десне. За $n<5$ провером добијамо да једнакост $(*)$ важи за $n\in\{1,2,3\}$. Овим је доказано да за $n>3$ тражено c не постоји. Размотримо сада случајеве $n\leqslant 3$. Није тешко уверити се да за $n=1$, $n=2$, односно $n=3$, константе $c=0$, $c=2$, односно $c=3$, задовољавају услов задатка.

2. Претпоставимо да матрица са наведеним особинама постоји. Означимо њену детерминанту са d. На основу Коши-Бинеове теореме имамо $-2=\det A^k=(\det A)^k=d^k$ и $4=\det A^n=(\det A)^n=d^n$. Одавде је $d^{2k}=d^n$, па је $|d|^{2k}=|d|^n$. Како је $|d|>1$, а експоненцијална функција са основом већом од 1 строго растућа, добијамо $2k=n$. Међутим, тада би важило $(A^k)^2=A^n$, што није тачно. Дакле, матрица са наведеним особинама не постоји.

3. Нека је $d=n^2+a$. Како је $n=1$ решење задатка, претпоставимо да је $n>1$. Тада d дели $(n^4+1)-(n^4-a^2)=a^2+1$, тј. $(n^2+a)\cdot b=a^2+1$, за неко $b\in\mathbb{N}$. Из ове једнакости је

$$a^2-ba+1-n^2b=0,\tag{$*$}$$

па је $3n+7\geqslant a=\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{4n^2b+b^2-4}}{2}$. Приметимо да за $b\geqslant 13$ важи $b+\sqrt{4n^2b+b^2-4}>13+7n>14+6n$, што је у контрадикцији са претходном неједнакошћу, па је $b\leqslant 12$. Из $b\mid a^2+1$ следи да b не може бити дељив са 4, а ни са простим бројем облика $4k-1$ (јер тада -1 није квадратни остатак). Дакле, $b\notin\{3,4,6,7,8,9,11,12\}$ (ово се може доказати и директно, без коришћења претходно наведених чињеница). Даље, не може бити ни $b=1$, јер једначина $n^2=a^2-a+1$, због $(a-1)^2<a^2+1-a<a^2$, нема решења у скупу природних бројева. За $b=2$ је $n^2=\dfrac{(a-1)^2}{2}$, што такође није могуће. Дакле, $b\in\{5,10\}$.

Нека је $b=5$. Тада је $5n^2=a^2-5a+1\equiv(a-1)^2\pmod 3$, па су бројеви n и $a-1$ дељиви са 3. Међутим, тада $9\mid 3a=(a-1)^2-5n^2$, па је и a дељиво са 3, што није могуће.

Најзад, нека је $b=10$. Решавањем једначине $(*)$ добијамо $a=5+\sqrt{10n^2+24}$, а услов $a\leqslant 3n+7$ еквивалентан је са $0\geqslant n^2-12n+20$, односно $n\leqslant 10$. Како је $10n^2+24$ потпун квадрат, то је n паран (у супротном је $10n^2+24\equiv 2\pmod 4$). Провером добијамо да је за $n\leqslant 10$ број a природан једино за $n\in\{2,10\}$. За $n=2$ број $d=17$, а за $n=10$ број $d=137$, задовољава услове задатка.

Тражени бројеви су $1,2$ и 10.

4. Означимо тражени полупречник са r. Нека је са $S(X)$ означена површина фигуре X.

Важи $S(ABD)=r(AB+AD+BD)/2$ и $S(ACD)=r(AD+AC-CD)/2$ (за извођење ове формуле погледати решење 2. задатка за 2. разред), па је

$$\frac{BD}{CD}=\frac{S(ABD)}{S(ACD)}=\frac{AB+AD+BD}{AC+AD-CD}.$$

Користећи $AB = AC$, одавде добијамо $BD(AB + AD - CD) = CD(AB + AD + BD)$, односно $2BD \cdot CD = (BD - CD)(AB + AD)$. Даље, по Стјуартовој теореми је $AB^2 - AD^2 = BD \cdot CD$, па заменом у претходну једнакост добијамо $BD - CD = 2(AB - AD)$.

Сада имамо $h_b \cdot AC = 2S(ABC) = 2S(ABD) + 2S(ACD) = r(AB + AD + BD) + r(AC + AD - CD) = r(2AB + 2AD + BD - CD) = 4r \cdot AB$. Дељењем са AB добијамо тражено тврђење.

5. Сваком скупу A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, можемо доделити једну n-торку чија је l-та координата, за $1 \leqslant l \leqslant n$, једнака 1 ако $l \in A_i$, а 0 иначе. Да би тражени услов био задовољен потребно је да за свако l, $1 \leqslant l \leqslant n$, постоји барем једно i, $1 \leqslant i \leqslant k$, тако да је l-та координата низа додељеног скупу A_i једнака 1. Зато l-те координате скупова A_1, A_2, $\dots$, A_k можемо одабрати на $2^k - 1$ начина, за свако $1 \leqslant l \leqslant n$, па самим тим k-торки $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ има $(2^k - 1)^n$. (Тангента 63, стр. 12, М932)

Четврти разред - А категорија

1. Како је $(m+n)c = mb + na$, а $(m+n)a < mb + na < (m+n)b$, то је $a < c < b$. Из услова задатка следи да је $p(x) = (x-a)^m(x-b)^n$. Даље је

$$p'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + (x-a)^m n(x-b)^{n-1} = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}((m+n)x - (mb+na)),$$

па је $p'(c) = 0$ и $p'(x)$ непрекидна функција. Нека је $\varepsilon > 0$ такво да је $a < c - \varepsilon < c + \varepsilon < b$. Тада за $c < d < c + \varepsilon$ важи $(d-a)^{m-1} > 0$, $(d-b)^{n-1} < 0$ (јер је n паран) и $(m+n)d - (mb+na) = (m+n)(d-c) > 0$, односно $p'(d) < 0$. Слично, за $c - \varepsilon < d < c$ важи $p'(d) > 0$, што доказује да је c локални максимум дате функције.

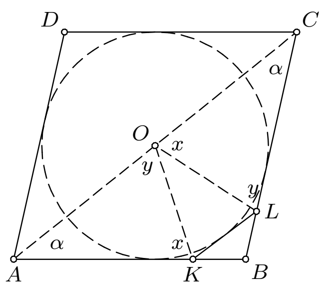
2. Приметимо да из $a * b = a * d$ следи $a + b + c = (a*b)*c = (a*d)*c = a + d + c$ и одатле $b = d$. Слично, из $a * b = d * b$ следи $a = d$. Сада из $(a*b)*c = (b*a)*c = a + b + c$ добијамо $a * b = b * a$. Означимо $x = a * 0$. Тада је $x * 0 = (a*0)*0 = a$, па је $2x = (x*0)*x = a*x = x*a = (a*0)*a = 2a$, дакле $x = a*0 = a$. Коначно, коришћењем последње особине добијамо $a * b = (a*b)*0 = a + b$.

3. Користићемо следеће познато тврђење:

> Природан број се може представити као збир два квадрата ако и само ако се сваки његов прост делилац облика $4k-1$, $k \in \mathbb{N}$, јавља са парним експонентом.

Како је НЗД$(x-1, x+1) \in \{1, 2\}$, из претходног тврђења закључујемо да су $x-1$ и $x+1$ збирови два квадрата ако и само ако је то и њихов производ $x^2 - 1$. Ово је, опет, еквивалентно постојању целих бројева v и w за које је $x^2 - 1 = (x-v)^2 + w^2$. Сређивањем добијамо $v^2 + w^2 + 1 = 2vx$, па $v \mid w^2 + 1$, односно $w^2 + 1 = uv$. Коначно $2x = u + v$, а $uv - 1 = w^2$, односно $uv - 1$ је потпун квадрат.

4. Нека је O центар круга уписаног у ромб. Означимо $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$, $\sphericalangle AKO = \sphericalangle OKL = x$ и $\sphericalangle KLO = \sphericalangle OLC = y$. Из збира углова четвороугла $AKLC$ је $360^\circ = 2\alpha + 2x + 2y$, тј. $\alpha + x + y = 180^\circ$. Даље, из збира углова троугла AKO је $\sphericalangle KOA = y$, а из збира углова троугла CLO је $\sphericalangle LOC = x$. Дакле, троуглови KOA и OLC су слични, па имамо $AK \cdot CL = AO \cdot CO = AO^2$. Аналогно је и $AN \cdot CM = AO^2$, одакле следи $KA/AN = MC/CL$. Како је још и $\sphericalangle NAK = \sphericalangle LCM$, троуглови KAN и MCL су слични, па је $\sphericalangle AKN = \sphericalangle CML$, тј. $KN \parallel LM$.



Ок 2013 4А 4

5. Користићемо следеће тврђење:

> Нека је $a, b \in \mathbb{N}$. Тада се a објеката може рапоредити у b непразних група на $\binom{a-1}{b-1}$ начина.

Размотримо прво случај када је $k = 2r - 1$ непаран број. Тада тражени низови могу бити облика $J_1N_1J_2N_2 \dots J_rN_r$ или $N_1J_1N_2J_2 \dots N_rJ_r$, где су J_i и N_i, за $1 \leqslant i \leqslant r$, непразни низови јединица и нула, редом. Да бисмо добили низ који је неког од ових облика довољно је распоредити m јединица у r непразних група и n нула у r непразних група. Дакле, низова првог и другог облика има по $\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}$, па је укупан број низова једнак $2\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}$.

У случају да је $k = 2r$ паран број тражени низови могу бити облика $J_1N_1J_2N_2 \ldots J_rN_rJ_{r+1}$ или $N_1J_1N_2J_2 \ldots N_rJ_rN_{r+1}$, где су опет J_i и N_i, за $1 \leqslant i \leqslant r$, непразни низови јединица и нула, редом. Да бисмо добили низ првог облика довољно је распоредити m јединица у $r+1$ непразну групу и n нула у r непразних група, а да бисмо добили низ другог облика довољно је распоредити m јединица у r непразних група и n нула у $r+1$ непразну групу. Дакле, тражени број низова у овом случају једнак је

$$\binom{m-1}{r}\binom{n-1}{r-1} + \binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r}.$$

(Тангента 62, стр. 15, М906)

Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМЕМАТИКЕ
Решења задатака

Први разред - Б категорија

1. Из услова задатка је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$. Како је $\overrightarrow{MA} = -\vec{b}$, то је из претходног $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}$. Тачке A, O и C су колинеарне, па је $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AC}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, а како су тачке B, O и D колинеарне добијамо $\overrightarrow{BO} = \mu\overrightarrow{BD}$. Даље, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} + \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$, па како је $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, из претходних једнакости добијамо

$$2\vec{b} = \lambda(2\vec{b} + \vec{a}) - \mu(\vec{a} - \vec{b}) = (\lambda - \mu)\vec{a} + (2\lambda + \mu)\vec{b}.$$

Дакле, $0 = \lambda - \mu$ и $2 = 2\lambda + \mu$. Решавањем овог система добијамо $\lambda = \mu = 2/3$, па је

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) + \vec{b} = -\frac{1}{3} \cdot \left(2\vec{a} + \vec{b}\right).$$

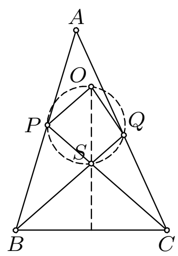
(Тангента бр. 62, стр. 36, зад. 3)

2. Тражене једнакости следе из

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{((1-x)^2 - (1-x) + 1)^3}{(1-x)^2(1-x-1)^2} = \frac{(1 - 2x + x^2 - 1 + x + 1)^3}{(x-1)^2 x^2} = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} + 1\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)^3}{\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^2} = \frac{\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6}}{\frac{(1-x)^2}{x^4}} = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}. \end{aligned}$$

3. Бројеви 9^a и 2013^c дељиви су са 3, па бројеви 2^b и 2014^d дају исти остатак при дељењу са 3. Приметимо да број 2014 даје остатак 1 при дељењу са 3, па и сваки његов степен даје остатак 1 при дељењу са 3. Самим тим, 2^b даје остатак 1 при дељењу са 3. Приметимо да је $2^{2k} = 4^k$ и $2^{2k+1} = 2^{2k} \cdot 2 = 4^k \cdot 2$, за свако $k \in \mathbb{N}$, па 2^{2k} даје остатак 1 при дељењу са 3, а 2^{2k+1} остатак 2 при дељењу са 3. Дакле, b мора бити паран број. Одавде је $b \geqslant 2$, па је $2^b = 4 \cdot 2^{b-2}$ дељиво са 4. Бројеви 9 и 2013 дају остатак 1 при дељењу са 4, па и бројеви 9^a и 2013^c дају остатак 1 при дељењу са 4. Одавде закључујемо да 2014^d даје остатак 2 при дељењу са 4, па како је 2014 паран, то је $d = 1$. Међутим, бројеви a, b, c су природни, па је $9^a + 2^b + 2013^c \geqslant 9 + 2 + 2013 > 2014$, што доказује да дата једначина нема решења у скупу природних бројева.

4. Нека је S тачка пресека правих BQ и CP, а $\alpha = \sphericalangle BAC$. Из збира углова троугла BCS имамо $180^\circ = \sphericalangle SBC + \sphericalangle SCB + \sphericalangle BSC = 2\alpha + \sphericalangle BSC$, па је $\sphericalangle BSC = 180^\circ - 2\alpha$. Даље, посматрајући кружницу описану око троугла APQ имамо $\sphericalangle POQ = 2\sphericalangle PAQ = 2\alpha$, а како је $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle BSC = 180^\circ - 2\alpha$ (као унакрсни углови), то је $\sphericalangle POQ + \sphericalangle PSQ = 180^\circ$, па тачке P, O, Q и S леже на истој кружници k. Како је $PO = QO$ (као полупречници кружнице описане око троугла PAQ), то су углови над овим тетивама кружнице k једнаки, односно $\sphericalangle PSO = \sphericalangle OSQ$.



Ок 2013 1Б 4

Из једнакости унакрсних углова закључујемо да је права OS симетрала $\sphericalangle BSC$. Како је $\sphericalangle SBC = \sphericalangle BCS$, то је троугао BCS једнакокраки, па се симетрала $\sphericalangle BSC$ поклапа са симетралом странице BC, односно OS је симетрала странице BC.

5. Број 5555 је једини четвороцифрени број који има четири цифре 5. Одредимо колико има четвороцифрених бројева који имају тачно три цифре 5. Има тачно њих 8 код којих цифра хиљада није једнака 5 (цифра хиљада не може бити 0 или 5, док су остале цифре једнаке 5) и тачно њих $3 \cdot 9 = 27$ код којих цифра јединица, десетица или стотина није једнака 5. Одредимо колико има четвороцифрених бројева којима су тачно две цифре једнаке 5. Уколико је цифра хиљада једнака 5, тада имамо три могућности за преосталу цифру 5 (она може бити цифра јединица, десетица или стотина), а затим за сваку од преостале две цифре имамо 9 могућности, тј. ових бројева има $3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$. Уколико цифра хиљада није једнака

5, цифру хиљада можемо одабрати на 8 начина, а затим и место за преосталу цифру која није једнака 5 на 3 начина и ту цифру на 9 начина, тј. ових бројева има $8 \cdot 3 \cdot 9 = 216$.

Бројева са траженим својством има $1 + 8 + 27 + 243 + 216 = 495$. (Тангента 64, стр. 34, зад. 6)

Други разред - Б категорија

1. Нека је $z = x + yi$, за $x, y \in \mathbb{R}$. Дате једнакости се своде на

$$(x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2, \qquad x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2.$$

Прва једначина еквивалентна је са $x + y = 3$, а друга са $x = 2$. Одавде добијамо $x = 2$ и $y = 1$, па је тражени број $z = 2 + i$. (Тангента 69, стр. 29, зад. 5)

2. Како парабола додирује x-осу у тачки $(2, 0)$ имамо да је $y = a(x-2)^2$, а како је њен пресек са y-осом тачка $(0, 8)$ имамо и $8 = a(0-2)^2$. Одавде је $a = 2$, па је дата парабола $y = 2(x-2)^2$. Приметимо да је за све (x, y) са параболе испуњено $y \geqslant 0$, и да ако је $y \leqslant 2012$, важи и $-2012 < -\sqrt{1006}+2 \leqslant x \leqslant \sqrt{1006}+2 < 2012$, па је довољно испитати колико целобројних тачака (m, n) таквих да је $n \leqslant 2012$ лежи на параболи. Такође, за сваку целобројну вредност броја m из интервала $(-\sqrt{1006}+2, \sqrt{1006}+2)$, постоји тачно једна целобројна вредност броја n таква да је тачка (m, n) на датој параболи. Дакле, број тражених тачака је једнак броју целих бројева у интервалу $(-\sqrt{1006}+2, \sqrt{1006}+2)$, тј. 63.

3. Уколико је број p једнак 0, тј. уколико је $m = n$ (овакве бројеве n називамо *палиндромима*), тада је $p_1 = 0$ па је тражени број једнак 0. Уколико је $p \neq 0$ тада је сваки од наредних бројева већи од нуле, као збир цифара ненула целог броја. Приметимо да збир цифара броја даје исти остатак као и сам број при дељењу са 9. Самим тим, како бројеви m и n имају исти збир цифара, они дају исти остатак при дељењу са 9, па је p дељив са 9. Коришћењем истог својства добијамо да је p_1, као и сваки наредни број, дељив са 9. Самим тим, p_k је дељив са 9, једноцифрен и већи од нуле, па је $p_k = 9$.

4. Нека је $ABCD$ дати четвороугао и O пресек његових дијагонала.

Применом неједнакости троугла на $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ добијамо редом

$$AB + BC > AC,\ BC + CD > BD,\ CD + DA > AC,\ DA + AB > BD.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо $2(AB+BC+CD+DA) > 2(AC+BD)$, односно да је збир дијагонала четвороугла мањи од обима.

Применом неједнакости троугла на $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$, $\triangle DAO$ добијамо редом

$$AO + BO > AB,\ BO + CO > BC,\ CO + DO > CD,\ DO + AO > DA.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо $2(AO+BO+CO+DO) > AB+BC+CD+DA$, односно $AC+BD > (AB+BC+CD+DA)/2$, тј. збир дијагонала четвороугла је већи од полуобима. (Тангента 65, стр. 38, зад. 4)

5. Означимо са a исказ „Аца је Истинољубић”, тј. $a =$„Аца је Истинољубић” (тада имамо да је $\neg a =$„Аца је Лажетић”), са $b =$„Бане је Истинољубић” и са $c =$„Цепи је Истинољубић”. Ацина изјава, „Или ја или Бане припадамо различитој породици од остале двојице”, се може представити као:

$$A = \Big((a \veebar b) \wedge (a \veebar c)\Big) \veebar \Big((a \veebar b) \wedge (b \veebar c)\Big).$$

Означимо леви део овог исказа са $L = \Big((a \veebar b) \wedge (a \veebar c)\Big)$, а десни са $D = \Big((a \veebar b) \wedge (b \veebar c)\Big)$. Направимо одговарајућу таблицу истинитости (у горњој половини таблице, где је Аца Лажетић, морамо да ставимо и исказ $\neg A$, јер је он тачан):

								A	
a	b	c	$a \veebar b$	$a \veebar c$	$b \veebar c$	L	D	$L \veebar D$	$\neg A$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	
1	0	1	1	0	1	0	1	1	
1	1	0	0	1	1	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	

Исказ A је тачан у следећим случајевима: $a=0$, $b=1$, $c=0$; $a=0$, $b=1$, $c=1$; $a=1$, $b=0$, $c=0$ и $a=1$, $b=0$, $c=1$. Међутим, у случајевима $a=0$, $b=1$, $c=0$ и $a=0$, $b=1$, $c=1$ Аца увек лаже, тако да он није могао да изговори исказ A. Дакле, дати исказ је тачан само у случајевима $a=1$, $b=0$, $c=0$ и $a=1$, $b=0$, $c=1$. Ако Аца лаже, онда посматрамо негацију $\neg A$ и она је тачна у случајевима $a=0$, $b=0$, $c=0$ и $a=0$, $b=0$, $c=1$. Заједничко за сва ова 4 случаја је $b=0$, тј. Бане је Лажетић.

Трећи разред - Б категорија

1. Из датих услова је $\vec{m}\cdot\vec{m}=|\vec{m}|^2=4$, $\vec{n}\cdot\vec{n}=|\vec{n}|^2=9$, $\vec{p}\cdot\vec{p}=|\vec{p}|^2=4$, $\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\pi/3)=3$, $\vec{m}\cdot\vec{p}=|\vec{m}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos(\pi/2)=0$, $\vec{n}\cdot\vec{p}=|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos(\pi/3)=3$, па је

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &=(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})\cdot(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})=9\vec{m}\cdot\vec{m}+4\vec{n}\cdot\vec{n}+\vec{p}\cdot\vec{p}+12\vec{m}\cdot\vec{n}-4\vec{n}\cdot\vec{p}-6\vec{m}\cdot\vec{p}=100,\\ |\vec{b}|^2 &=(\vec{m}-\vec{n}+2\vec{p})\cdot(\vec{m}-\vec{n}+2\vec{p})=\vec{m}\cdot\vec{m}+\vec{n}\cdot\vec{n}+4\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{m}\cdot\vec{n}-4\vec{n}\cdot\vec{p}+4\vec{m}\cdot\vec{p}=11.\end{aligned}$$

Одавде је $|\vec{a}|=10$ и $|\vec{b}|=\sqrt{11}$. (Тангента 66, стр. 38, зад. 2)

2. Претпоставимо да је $\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{ctg}3x\in(2/3,9)$. Приметимо да x није облика $\pi/2+k\pi$, за неко $k\in\mathbb{Z}$, јер је у супротном $\operatorname{tg}2x=0$. Дакле, $\operatorname{tg}x$ је дефинисано, па важи $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$. Такође, $\operatorname{ctg}3x\neq0$, па је и $\operatorname{tg}3x$ дефинисан и по адиционим формулама важи $\operatorname{tg}3x=\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}$. Нека је

$$y=\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{ctg}3x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\cdot\frac{1-3\operatorname{tg}^2x}{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}=\frac{2-6\operatorname{tg}^2x}{3-4\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}=\frac{2-6m}{3-4m+m^2}\in\left(\frac{2}{3},9\right),$$

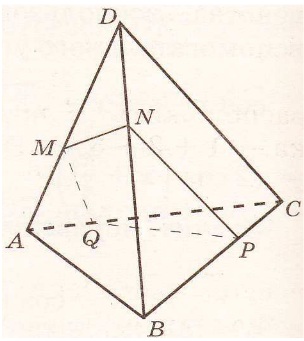
где је $m=\operatorname{tg}^2x$. Тада је

$$y\cdot m^2+(6-4y)\cdot m+(3y-2)=0. \qquad (*)$$

Према претходном, квадратна једначина $(*)$ (по m) има ненегативно решење. Дакле, $D=(6-4y)^2-4y(3y-2)\geqslant0$, односно $4y^2-40y+36\geqslant0$. Решавањем ове квадратне неједначине добијамо да је $y\geqslant9$ или $y\leqslant1$, па је према претходном $y\in(2/3,1]$. Међутим, тада је $y>0$, $6-4y>0$ и $3y-2>0$, па је по Виетовим формулама збир решења једначине $(*)$ негативан, а производ позитиван, а самим тим оба решења су негативна. Контрадикција.

3. Претпоставимо прво да је $x\geqslant7$. Тада лева страна једначине даје остатак 6 при дељењу са 7. Међутим, како квадрат ниједног природног броја не даје остатак 6 при дељењу са 7 (могући остаци су: $0^2=0$, $(\pm1)^2=1$, $(\pm2)^2=4$, $(\pm3)^2\equiv2\pmod 7$), у овом случају једначина нема решења. Преостаје још да се испитају случајеви $1\leqslant x\leqslant6$. Директном провером се установљава да су решења $(x,y)\in\{(4,10),(5,14)\}$ (тада имамо $4!+76=24+76=100=10^2$ и $5!+76=120+76=196=14^2$).

4. Нека је $AB=a$ и $CD=b$. Изаберимо тачку P на страници BC тако да важи $BP/PC=a/b$. Затим, изаберимо тачку $N\in BD$ тако да је $NP\parallel CD$, а затим и тачку $M\in AD$ тако да је $MN\parallel AB$. Коначно изаберимо тачку $Q\in AC$ тако да је $MQ\parallel DC$. Довољно је доказати да је $MNPQ$ ромб, јер тада тачке M, N, P, Q припадају истој равни. Због начина одабира тачака и Талесове теореме је $BP/PC=BN/ND=AM/MD=AQ/QC$, па је $QP\parallel AB$, и самим тим $MNPQ$ је паралелограм. Даље, из $QP\parallel AB$ и $NP\parallel DC$ је по Талесовој теореми $\dfrac{QP}{a}=\dfrac{CP}{BC}$ и $\dfrac{NP}{b}=\dfrac{BP}{BC}$, па је $\dfrac{NP}{QP}=\dfrac{b\cdot BP}{a\cdot CP}=1$, што завршава наш доказ.



Ок 2013 3Б 4

5. Одредимо ученике који ће седети у првом реду. Ово су ученици који раде прву или другу групу задатака, тако да то можемо урадити на 2 начина. Затим, у сваком реду треба распоредити по 10 ученика у произвољном редоследу. За сваки ред то можемо урадити на $10!$ начина, тако да је тражени број распореда једнак $2\cdot(10!)^2$. (Тангента 62, стр. 38, зад. 1)

Четврти разред - Б категорија

1. Нека је дужина странице квадрата који чини основу кутије једнака a, а дужина висине једнака b. Тада је $V = a^2b$, а површина кутије једнака је $P = a^2 + 4ab$. По услову задатка, потребно је одредити a и b тако да при услову $V = a^2b$ површина кутије буде минимална. Из датог услова је $b = \dfrac{V}{a^2}$, па је потребно одредити минималну вредност фунцкије

$$P(x) = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Да би у тачки a функција $P(x)$ имала минимум потребно је да је $0 = P'(a) = 2a - \dfrac{4V}{a^2}$, односно $a = \sqrt[3]{2V}$. Како је $P'(x) > 0$ за $x > a$, а $P'(x) < 0$ за $0 < x < a$, у тачки a је минимум функције $P(x)$.
Дакле, да би се употребило минимално материјала потребно је направити кутију чија је основа квадрат странице $a = \sqrt[3]{2V}$, а висина $b = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$. (Тангента 66, стр. 38, зад. 3)

2. Уведимо смене $x(x-1) = t$ и $a(a-1) = b$ и решимо једначину

$$0 = b^2(t+1)^3 - (b+1)^3t^2 = b^2t^3 - (b^3+3b+1)t^2 + 3b^2t + b^2. \qquad (*)$$

Из полазне једначине знамо да је b једно решење једначине $(*)$, па дељењем $b^2t^3 - (b^3+3b+1)t^2 + 3b^2t + b^2$ са $t - b$ добијамо

$$0 = (t-b)(b^2t^2 - (3b+1)t - b).$$

Самим тим, решења једначине $(*)$ су $t_1 = b$, $t_{2,3} = \dfrac{3b+1 \pm \sqrt{9b^2+6b+1+4b^3}}{2b^2}$. Приметимо да је

$$4b^3+9b^2+6b+1 = 4a^3(a-1)^3+9a^2(a-1)^2+6a(a-1)+1 = 4a^6-12a^5+21a^4-22a^3+15a^2-6a+1 = (2a^3-3a^2+3a-1)^2,$$

па је $t_2 = \dfrac{a}{(a-1)^2}$, а $t_3 = \dfrac{-2a^3+6a^2-6a+2}{2a^2(a-1)^2} = \dfrac{-2(a-1)^3}{a^2(a-1)^2} = -\dfrac{a-1}{a^2}$. Дакле, довољно је решити следеће три једначине

$$x(x-1) = a(a-1), \quad x(x-1) = \frac{a}{(a-1)^2}, \quad x(x-1) = -\frac{a-1}{a^2}.$$

Решења прве једначине су $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a(a-1)}}{2} = \dfrac{1 \pm (2a-1)}{2}$, односно $x_1 = a$ и $x_2 = 1-a$. Решења друге једначине су

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{4a}{(a-1)^2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 \pm \left|\frac{a+1}{a-1}\right|\right),$$

односно $x_3 = \dfrac{a}{a-1}$ и $x_4 = \dfrac{1}{1-a}$. Решења треће једначине су

$$x_{5,6} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{4(a-1)}{a^2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 \pm \left|\frac{a-2}{a}\right|\right),$$

односно $x_5 = \dfrac{a-1}{a}$ и $x_6 = \dfrac{1}{a}$. Како је $x_i \notin \{0,1\}$, за $1 \leqslant i \leqslant 6$, то су x_i, за $1 \leqslant i \leqslant 6$, решења почетне једначине.

3. Приметимо да је $\lfloor x + \frac{1}{6} \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor$, $\lfloor x + \frac{3}{6} \rfloor \geqslant \lfloor x + \frac{2}{6} \rfloor$ и $\lfloor x + \frac{5}{6} \rfloor \geqslant \lfloor x + \frac{4}{6} \rfloor$. Дата једначина еквивалентна је систему који се добија када се свуда неједнакост замени једнакошћу.

Приметимо да $x \in \mathbb{R}$ није решење једначина $\lfloor x + \frac{1}{6} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ ако и само ако је $x \in \left[k + \frac{5}{6}, k+1\right)$ за неки цео број k. Самим тим, скуп решења претходне једначине је $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{5}{6}, k+1\right)$. Аналогно, једначина $\lfloor x + \frac{3}{6} \rfloor = \lfloor x + \frac{2}{6} \rfloor$ има скуп решења $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{3}{6}, k + \frac{4}{6}\right)$, а једначина $\lfloor x + \frac{5}{6} \rfloor = \lfloor x + \frac{4}{6} \rfloor$ скуп решења $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{6}\right)$. Скуп решења почетне једначине је пресек ових скупова, односно:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[k, k+\frac{1}{6}\right) \cup \left[k+\frac{2}{6}, k+\frac{3}{6}\right) \cup \left[k+\frac{4}{6}, k+\frac{5}{6}\right)\right).$$

4. Пошто је пресек равни и паралелопипеда петоугао, то раван пресеца 5 страна паралелопипеда. Нека је $KLMHP$ дати петоугао, тако да је $K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$, $H \in C_1D_1$ и $P \in D_1A_1$ (видети слику). Тачке K, L, M, H се налазе у истој равни, па како се праве KL и HM не секу, то је $KL \parallel HM$. Слично је $LM \parallel KP$.

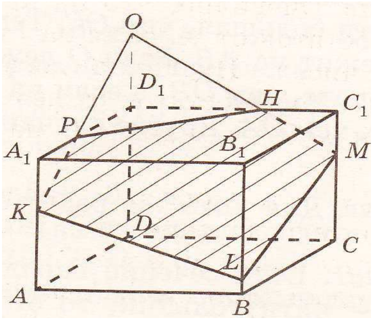
Продужимо дужи KP и MH до њиховог пресека O. Тада је $KLMO$ паралелограм, па је

$$LM = KO = KP + PO \qquad \text{и} \qquad LK = MO = MH + HO.$$

Како је $LM, KP, LK, MH \in \{1,2\}$, добијамо да је $LM = LK = 2$ и $KP = MH = 1$, а затим и $HO = PO = 1$.

Размотримо сада $\triangle POH$. Како је $PH \in \{1,2\}$ и због неједнакости троугла $PH < PO + HO = 1 + 1 = 2$, добијамо да је $PH = 1$, тј. да је $\triangle POH$ једнакостранични. Одатле имамо да је $\sphericalangle PHO = \sphericalangle HPO = 60°$, па је $\sphericalangle PHM = \sphericalangle HPK = 120°$. Из паралелограма $KLMO$ је $\sphericalangle KLM = \sphericalangle POH = 60°$ и $\sphericalangle LKP = \sphericalangle LMH = 120°$.

Дакле, четири угла датог петоугла једнака су $120°$, а један $60°$.



Ок 2013 4Б 4

5. Број бијекција на скупу од четири елемента је једнак броју пермутација на скупу од четири елемента, односно $4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$. Како константних функција има 4, а укупан број функција је 4^4 (сваки елемент скупа $\{a, b, c, d\}$ се може сликати у произвољан елемент скупа $\{a, b, c, d\}$), то је тражени број једнак $4^4 - 24 - 4 = 228$. (Тангента 69, стр. 12, М1062)