54. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санта Марта, Колумбија – уторак, 23. јул 2013.

1. Доказати да за свака два природна броја k и n постоји k природних бројева $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не обавезно различитих) таквих да је

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

(Јапан)

2. Конфигурацију 4027 тачака у равни зовемо *колумбијском* ако се састоји од 2013 црвених и 2014 плавих тачака, при чему никоје три тачке у конфигурацији нису колинеарне. Повлачењем правих, раван се дели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* за колумбијску конфигурацију ако су задовољена следећа два услова:

- ниједна права не пролази кроз неку тачку из конфигурације;
- ниједна област не садржи тачке различитих боја.

Наћи најмањи број k такав да за сваку колумбијску конфигурацију 4027 тачака постоји добар распоред k правих. *(Аустралија)*

3. Приписани круг троугла ABC наспрам темена A додирује страницу BC у тачки A_1. Аналогно се дефинишу тачке B_1 на CA и C_1 на AB, као додирне тачке приписаних кругова наспрам темена B и C, редом. Претпоставимо да центар описаног круга троугла $A_1B_1C_1$ лежи на описаном кругу троугла ABC. Доказати да је троугао ABC правоугли. *(Русија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

54. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санта Марта, Колумбија – среда, 24. јул 2013.

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а W тачка на страници BC различита од темена B и C. Тачке M и N су подножја висина из темена B и C, редом. Нека је ω_1 описани круг троугла BWN, а X тачка на ω_1 таква да је WX пречник круга ω_1. Аналогно, нека је ω_2 описани круг троугла CWM, а Y тачка на ω_2 таква да је WY пречник круга ω_2. Доказати да су тачке X, Y и H колинеарне. *(Тајланд)*

5. Нека је $\mathbb{Q}_+$ скуп свих позитивних рационалних бројева. Нека функција $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}$ задовољава следећа три услова:

(i) за све $x, y \in \mathbb{Q}_+$ важи $f(x)f(y) \geqslant f(xy)$;

(ii) за све $x, y \in \mathbb{Q}_+$ важи $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$;

(iii) постоји рационалан број $a > 1$ такав да је $f(a) = a$.

Доказати да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{Q}_+$. *(Бугарска)*

6. Дат је природан број $n \geqslant 3$, и $n+1$ тачака на кругу које га деле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима $0, 1, \ldots, n$, где се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем круга. Означавање се назива *лепим* ако, за сваке четири ознаке $a < b < c < d$ за које је $a+d = b+c$, тетива која спаја тачке означене са a и d не сече тетиву која спаја тачке означене са b и c.

Нека је M број лепих означавања, а N број уређених парова (x, y) природних бројева таквих да је $x + y \leqslant n$ и НЗД$(x, y) = 1$. Доказати да је

$$M = N + 1.$$

(Русија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Почнимо од примера: за $k=2$ имамо $\frac{7}{4}=\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{4}=\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2}$ и $\frac{8}{5}=\frac{8}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}$.

Тврђење задатка доказујемо индукцијом по k. База $k=1$ је тривијална.

Претпоставимо да тврђење важи за $k=r-1$ (и свако n). Нека је $k=r$ и нека је n природан број. Разликујемо два случаја:

(1°) $2 \mid n=2n_1$. Тада је

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+2^r-2}\cdot\frac{n+2^r-2}{n}=\left(1+\frac{1}{n+2^r-2}\right)\left(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}\right).$$

Притом по индуктивној претпоставци постоје $m_1,m_2,\dots,m_{r-1}\in\mathbb{N}$ такви да важи $1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_{r-1}}\right)$, па је довољно узети $m_r=n+2^r-2$.

(2°) $2 \nmid n=2n_1-1$. Тада је

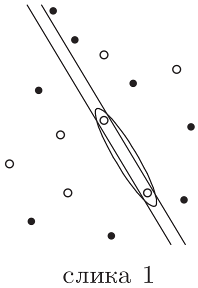
$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}\right).$$

И у овом случају важи $1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_{r-1}}\right)$ за неке $m_1,m_2,\dots,m_{r-1}\in\mathbb{N}$, па је довољно узети $m_r=n$.

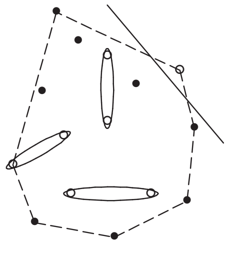
2. Посматрајмо конфигурацију тачака $A_1,A_2,\dots,A_{4027}$ у којој је $A_1A_2\dots A_{4027}$ правилан 4027-угао и тачка A_n је плава за $2\nmid n$ и црвена за $2\mid n$. У добром распореду правих, свака од 4026 дужи A_nA_{n+1} за $n=1,2,\dots,4026$ мора да буде пресечена бар једном правом. С друге стране, свака права може да сече највише две такве дужи. Зато нам је у овом случају потребно бар $2013=\frac{4026}{2}$ правих за добар распоред, тј. $k\geqslant 2013$.

Покажимо сада да за сваку колумбијску конфигурацију постоји добар распоред 2013 правих.

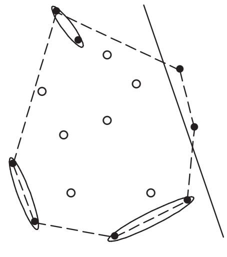
За почетак приметимо да се ма које две тачке исте боје могу издвојити из конфигурације помоћу две праве: довољно је узети две праве паралелне правој одређеној овим двема тачкама и довољно близу њих (сл.1).



слика 1



слика 2



слика 3

Посматрајмо конвексни омотач $\mathscr{P}$ датих 4027 тачака. Разликујемо два случаја.

(1°) Ако на $\mathscr{P}$ постоји црвена тачка, можемо је издвојити једном правом (сл.2). Преосталих 2012 црвених тачака можемо поделити у 1006 парова и, по претходном, издвојити их из конфигурације помоћу 2012 правих. Овако смо повукли 2013 правих које чине добар распоред.

(2°) Ако су све тачке на $\mathscr{P}$ плаве, можемо издвојити две плаве тачке једном правом (сл.3). На исти начин као у случају (1°), преосталих 2012 плавих тачака можемо издвојити помоћу 2012 правих, чиме добијамо укупно 2013 правих у добром распореду.

<u>*Друго решење.*</u> Доказаћемо индукцијом по n да за произвољан скуп n тачака обојених у црвено и плаво постоји добар распоред $[\frac{n}{2}]$ правих.

За $n \leqslant 2$ тврђење тривијално важи. Нека је $n > 2$. Посматрајмо две суседне тачке A и B на конвексном омотачу датих n тачака. На основу индуктивне претпоставке, за преосталих $n-2$ тачака можемо повући $[\frac{n}{2}]-1$ правих у добром распореду. Разликујемо три случаја:

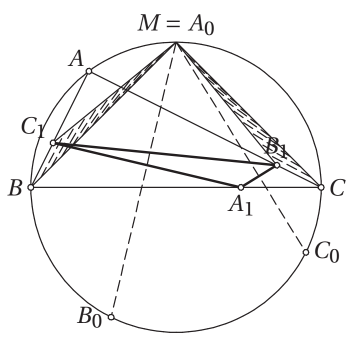
(1°) Ако су A и B су исте боје, можемо их издвојити од преосталих $n-2$ тачака једном правом ℓ. Тако добијамо добар распоред са укупно $[\frac{n}{2}]$ правих.

(2°) Ако су A и B различите боје, али су раздвојене неком од већ нацртаних правих, опет је довољно додати праву ℓ.

(3°) Ако су A и B различите боје, али леже у истој области одређеној повлачењем наведених $[\frac{n}{2}]-1$ правих, онда су у тој области све тачке осим A и B исте боје, рецимо плаве. Тачно једна од тачака A, B је црвена, па њу можемо издвојити од остатка скупа једном правом, чиме опет добијамо $[\frac{n}{2}]$ правих у добром распореду.

3. Претпоставимо без смањења општости да је центар M описаног круга троугла $A_1B_1C_1$ у унутрашњости угла $B_1A_1C_1$. Осим у M, симетрала дужи B_1C_1 сече описани круг троугла ABC у некој тачки M' на супротној страни праве B_1C_1 у односу на A_1.

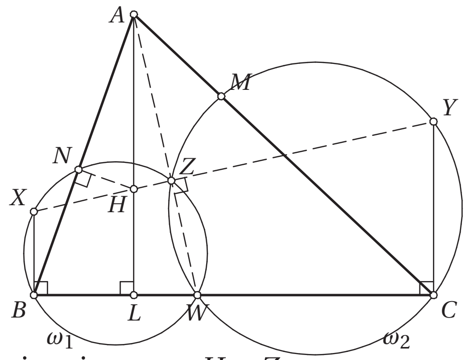
Означимо са A_0, B_0 и C_0 редом средишта лукова CAB, ABC и BCA. Како је $C_1B = B_1C$, $A_0B = A_0C$ и $\sphericalangle A_0BC_1 = \sphericalangle A_0CB_1$, троуглови A_0BC_1 и A_0CB_1 су подударни, па је $A_0B_1 = A_0C_1$, тј. A_0 лежи на симетрали дужи B_1C_1. Одавде је такође $\sphericalangle AB_1A_0 = \sphericalangle AC_1A_0$, па је A_0 на кругу B_1AC_1; како је тачка A_0 на спољашњој симетрали угла B_1AC_1, она је на истој страни праве B_1C_1 на којој је A. Следи да је $A_0 \not\equiv M'$, тј. $A_0 \equiv M$ је центар круга $A_1B_1C_1$.



Из једнакости $\sphericalangle B_1A_0C_1 = \sphericalangle B_1AC_1 = \alpha$ следи да је $\sphericalangle B_1A_1C_1 = 180° - \frac{\alpha}{2}$. С друге стране, како су B_0A_0 и C_0A_0 редом симетрале страница A_1C_1 и A_1B_1, имамо и $\sphericalangle B_1A_1C_1 = 180° - \sphericalangle B_0A_0C_0 = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Из ових једнакости следи да је $\alpha = 90°$.

4. Означимо са Z другу пресечну тачку кругова ω_1 и ω_2 ($Z \neq W$). Тачка Z је на правој XY јер је $\sphericalangle XZW = \sphericalangle YZW = 90^\circ$. Показаћемо да и H лежи на тој правој.

Тачке B, C, M и N леже на кругу ω над пречником BC. Радикалне осе парова кругова (ω, ω_1), (ω, ω_2) и (ω_1, ω_2) су редом праве BN, CM и WZ, па је радикални центар ова три круга тачка $A = BN \cap CM$, дакле $A \in WZ$.



Нека је L подножје висине из темена A. Како је $AZ \cdot AW = AN \cdot AB = AH \cdot AL$, тачке H, L, W и Z су концикличне. Ако је $W \not\equiv L$, одавде одмах следи да је $\sphericalangle AZH = \sphericalangle ALW = 90^\circ = \sphericalangle AZX$, па је H на правој XZY. Тврђење важи и за $W \equiv L$, јер је тада $H \equiv Z$.

5. Из $f(1)f(a) \geqslant f(1 \cdot a)$ следи $f(1) \geqslant 1$. Из (ii) једноставном индукцијом добијамо $f(nx) \geqslant nf(x)$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{Q}_+$. Тако важи $f(n) \geqslant nf(1) \geqslant n$ и $f(n)f(\frac{m}{n}) \geqslant f(m) > 0$, па је $f(x) > 0$ за свако $x \in \mathbb{Q}_+$. Одавде по (ii) закључујемо да је функција f строго растућа, што повлачи $f(x) \geqslant f([x]) \geqslant [x] > x - 1$ за свако $x \in \mathbb{Q}_+$.

Нека је $x > 1$. Из (i) индукцијом добијамо $f(x)^n \geqslant f(x^n) \geqslant x^n - 1$, па за све $n \in \mathbb{N}$ имамо $\frac{f(x)}{x} \geqslant \sqrt[n]{1 - \frac{1}{x^n}} \geqslant 1 - \frac{1}{x^n}$, одакле следи $\frac{f(x)}{x} \geqslant 1$, тј. $f(x) \geqslant x$.

Сада из $a^n = f(a)^n \geqslant f(a^n) \geqslant a^n$ добијамо $f(a^n) = a^n$. Даље, за $x > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ такво да је $a^n - x > 1$ важи $a^n = f(a^n) \geqslant f(x) + f(a^n - x) \geqslant x + (a^n - x) = a^n$, па је $f(x) = x$. Најзад, како је $f(n) = n$ за $n \in \mathbb{N}$, имамо $nf(x) = f(n)f(x) \geqslant f(nx) \geqslant nf(x)$, па је $f(nx) = nf(x)$, одакле следи $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{N}$.

Напомена. Ако се услов $a > 1$ искључи, тврђење више не важи. Заиста, за $c \geqslant 1$ функција $f(x) = cx^2$ задовољава услове (i) и (ii) и има фиксну тачку $x = \frac{1}{c} \leqslant 1$.

6. Уместо означавања датих $n+1$ тачака, радићемо са цикличним распоредима бројева $0, 1, \ldots, n$ по кругу, где је распоред *леп* ако одговара лепом означавању. Са $[p, q]$ означаваћемо тетиву круга одређену тачкама p и q, а са $[\widehat{p, q}]$ одговарајући лук у смеру казаљке на сату.

За почетак, како је $\frac{p}{q} \to (p, q-p)$ бијекција између разломака $\frac{p}{q}$, где су $p < q \leqslant n$ природни бројеви са нзд$(p, q) = 1$, и парова (x, y) природних бројева са нзд$(x, y) = 1$ и $x + y \leqslant n$, оваквих рационалних бројева $\frac{p}{q}$ има тачно N:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1} < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_N}{q_N} < \frac{1}{1} = \frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}.$$

Нека је $\alpha \in (0, 1)$ ирационалан број. Означимо произвољну тачку на кругу бројем 0, а за $k \in \mathbb{N}$ означимо са k тачку на кругу на угаоном растојању $2\alpha\pi$ од тачке

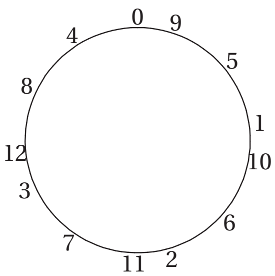
$k-1$ у смеру казаљке на сату (сл.1). Добијени распоред бројева $0,1,\ldots,n$ зовемо *цикличним* и означавамо са $R(\alpha)$. Сви циклични распореди су лепи. Заиста, ако у цикличном распореду бројеви $a<b<c<d$ задовољавају $a+d=b+c$, тачке a, b, c и d су темена једнакокраког трапеза, па је $[a,d]$ паралелно са $[b,c]$.

Када α расте од 0 до 1, редослед бројева x и $x+q$ се мења када α пролази кроз вредност $\frac{p}{q}$ за неко $p\in\{1,\ldots,q-1\}$. Према томе, за α у интервалу $(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},\frac{p_i}{q_i})$ распоред $R(\alpha)$ остаје исти; означимо тај распоред са R_i. Сви распореди $R_1,\ldots,R_{N+1}$ су различити. Заиста, ако је $\alpha<\frac{p_i}{q_i}<\alpha'$, путања $0-1-2-\cdots-q_i$ у распореду $R(\alpha')$ обилази круг бар p_i пута, а у распореду $R(\alpha)$ мање од p_i пута, па је $R(\alpha)\not\equiv R(\alpha')$. Дакле, различитих цикличних распореда има тачно $N+1$.

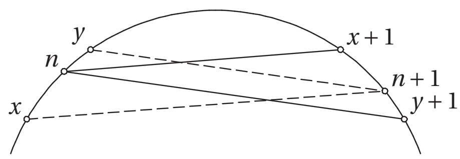
Приметимо да, за веома мало ε, у распореду $R(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}+\varepsilon)$ тачка q_{i-1} лежи одмах после нуле, док је у $R(\frac{p_i}{q_i}-\varepsilon)$ тачка q_i одмах пре нуле. Према томе:

($\circledast$) За $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}<\alpha<\frac{p_i}{q_i}$, у распореду $R(\alpha)$ претходник и следбеник броја 0 у смеру казаљке на сату су редом q_i и q_{i-1}.

Остаје да докажемо индукцијом по n да је сваки леп распоред цикличан. То је тачно за $n\leqslant 2$. Посматрајмо леп распоред R бројева $0,1,\ldots,n+1$. По индуктивној претпоставци, распоред бројева $0,1,\ldots,n$ се поклапа са распоредом $R(\alpha)$ за α из неког интервала $(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},\frac{p_i}{q_i})$. Нека се број n налази на луку $[\wideparen{x,y}]$ на коме нема других тачака. Како се тетиве $[x+1,n]$ и $[x,n+1]$ не секу, $n+1$ се налази на луку $[\wideparen{x+1,x}]$. Ни тетиве $[y+1,n]$ и $[y,n+1]$ се не секу, па је $n+1$ на луку $[\wideparen{y,y+1}]$. Дакле, $n+1$ мора бити на луку $[\wideparen{x+1,y+1}]$ (сл.2), као и у распореду $R(\alpha)$. Због цикличности, једина друга тачка која може лежати на овом луку је тачка 0.



слика 1: $R(\alpha)$ за n=12 и $\frac{2}{9}<\alpha<\frac{1}{4}$



слика 2

(1°) Ако у распореду $R(\alpha)$ тачка 0 није на луку $[\wideparen{x+1,y+1}]$, онда је $R\equiv R(\alpha)$.

(2°) Ако је у $R(\alpha)$ тачка 0 на луку $[\wideparen{x+1,y+1}]$, онда по ($\circledast$) важи $x+1=q_i$, $y+1=q_{i-1}$ и $\frac{k}{n+1}\in(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},\frac{p_i}{q_i})$ за неко $k\in\mathbb{N}$. Два могућа лепа распореда, када је 0 на луку $[\wideparen{q_i,n+1}]$ или $[\wideparen{n+1,q_{i-1}}]$, поклапају се са $R(\alpha)$ за $\alpha\in(\frac{k}{n+1},\frac{p_i}{q_i})$ и $\alpha\in(\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},\frac{k}{n+1})$.

<u>*Друго решење.*</u> Означимо $S=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid 1\leqslant x,y\leqslant n,\ \text{нзд}(x,y)=1\}$ и

$$S_1=\{(x,y)\in S \mid x+y\leqslant n\},\quad S_2=\{(x,y)\in S \mid x+y>n\}.$$

Знамо да је $|S_1|=N$ и $|S|=|S_1|+|S_2|$. Доказаћемо да леп распоред R у коме су a и b редом десни и леви сусед броја 0 постоји ако и само ако је $(a,b)\in S_2$, као и да је у том случају такав распоред јединствен.

Приметимо да не може да важи $a+b \leqslant n$, јер би се иначе тетиве $[0,a+b]$ и $[a,b]$ секле. Дакле, $a+b>n$.

За дато $c \in \{1,2,\dots,n\}$ дефинишимо $z_0 = c$ и, за $k \geqslant 0$,

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k + a & \text{ако је } z_k \leqslant n-a; \\ z_k - b & \text{ако је } z_k > n-a \text{ и } z_k \geqslant b; \\ z_k + a - b & \text{иначе.} \end{cases}$$

Овај низ је добро дефинисан. Приметимо да за свако $k \geqslant 1$ важи бар једна од једнакости $z_{k+1}+0 = z_k + a$, $z_{k+1}+b = z_k+0$ или $z_{k+1}+b = z_k+a$. У сваком случају, бројеви 0, z_k и z_{k+1} у распореду R леже тим редом у смеру казаљке на сату. То значи да, ако су бројеви $z_1, z_2, \dots, z_m$ различити од нуле, они се после нуле појављују у R тим редом (не обавезно као узастопни).

(1°) Ако је нзд$(a,b)>1$, узмимо $c=1$. Тада се у низу (z_k) никад не појављује нула, што је немогуће.

(2°) Ако је нзд$(a,b)=1$, тј. $(a,b) \in S_2$, узмимо $c=0$. Како је $z_{k+1} \equiv z_k + a \pmod{a+b}$ ако је $z_k + a \leqslant n$, док је у супротном $z_{k+1} \equiv z_k + 2a \pmod{a+b}$, низ $(z_k)_{k\geqslant 1}$ се поклапа са низом који се добије када се из низа остатака $a, 2a, 3a, \dots$ по модулу $a+b$ избаце чланови већи од n. Према томе, $z_1, z_2, \dots, z_n$ је пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$, па је распоред R једнозначно одређен.

Остаје да докажемо да је $|S_2| = N+1$. Сваком пару $(x,y) \in S_1$ доделимо парове $(x, x+y)$ и $(x+y, y)$. Ова два пара су различита и очигледно припадају скупу S, при чему је сваки пар из скупа S осим пара $(1,1)$ додељен тачно једном пару из S_1. Следи да је $|S| = 2N+1$ и одатле $|S_2| = |S| - |S_1| = N+1$.