Уторак, 23. јул 2013.

1. задатак. Доказати да за свака два природна броја k и n постоји k природних бројева $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не обавезно различитих) таквих да је

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

2. задатак. Конфигурацију 4027 тачака у равни зовемо *колумбијском* ако се састоји од 2013 црвених и 2014 плавих тачака, при чему никоје три тачке у конфигурацији нису колинеарне. Повлачењем правих, раван се дели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* за колумбијску конфигурацију ако су задовољена следећа два услова:

- ниједна права не пролази кроз неку тачку из конфигурације;
- ниједна област не садржи тачке различитих боја.

Наћи најмањи број k такав да за сваку колумбијску конфигурацију 4027 тачака постоји добар распоред k правих.

3. задатак. Приписани круг троугла ABC наспрам темена A додирује страницу BC у тачки A_1. Аналогно се дефинишу тачке B_1 на CA и C_1 на AB, као додирне тачке приписаних кругова наспрам темена B и C, редом. Претпоставимо да центар описаног круга троугла $A_1B_1C_1$ лежи на описаном кругу троугла ABC. Доказати да је троугао ABC правоугли.

Приписани круг троугла ABC наспрам темена A је круг који додирује страницу BC, продужетак странице AB преко тачке B и продужетак странице AC преко тачке C. Слично се дефинишу приписани кругови наспрам темена B и C.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

Среда, 24. јул 2013.

4. задатак. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а W тачка на страници BC различита од темена B и C. Тачке M и N су подножја висина из темена B и C, редом. Нека је ω_1 описани круг троугла BWN, а X тачка на ω_1 таква да је WX пречник круга ω_1. Аналогно, нека је ω_2 описани круг троугла CWM, а Y тачка на ω_2 таква да је WY пречник круга ω_2. Доказати да су тачке X, Y и H колинеарне.

5. задатак. Нека је $\mathbb{Q}_{>0}$ скуп свих позитивних рационалних бројева. Нека функција $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ задовољава следећа три услова:

(i) за све $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) за све $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) постоји рационалан број $a > 1$ такав да је $f(a) = a$.

Доказати да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

6. задатак. Дат је природан број $n \geq 3$, и $n+1$ тачака на кругу које га деле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима $0, 1, \ldots, n$, где се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем круга. Означавање се назива *лепим* ако, за сваке четири ознаке $a < b < c < d$ за које је $a + d = b + c$, тетива која спаја тачке означене са a и d не сече тетиву која спаја тачке означене са b и c.

Нека је M број лепих означавања, а N број уређених парова (x, y) природних бројева таквих да је $x + y \leq n$ и НЗД$(x, y) = 1$. Доказати да је

$$M = N + 1.$$

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова