

Уторак, 23. јул 2013.

1. задатак. Доказати да за свака два природна броја k и n постоји k природних бројева m_1, m_2, \dots, m_k (не обавезно различитих) таквих да је

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

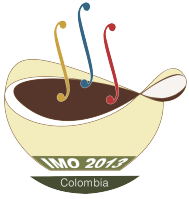
2. задатак. Конфигурацију 4027 тачака у равни зовемо *колумбијском* ако се састоји од 2013 црвених и 2014 плавих тачака, при чему никоје три тачке у конфигурацији нису колинеарне. Повлачењем правих, раван се дели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* за колумбијску конфигурацију ако су задовољена следећа два услова:

- ниједна права не пролази кроз неку тачку из конфигурације;
- ниједна област не садржи тачке различитих боја.

Наћи најмањи број k такав да за сваку колумбијску конфигурацију 4027 тачака постоји добар распоред k правих.

3. задатак. Приписани круг троугла ABC наспрам темена A додирује страницу BC у тачки A_1 . Аналогно се дефинишу тачке B_1 на CA и C_1 на AB , као додирне тачке приписаних кругова наспрам темена B и C , редом. Претпоставимо да центар описаног круга троугла $A_1B_1C_1$ лежи на описаном кругу троугла ABC . Доказати да је троугао ABC правоугли.

Приписани круг троугла ABC наспрам темена A је круг који додирује страницу BC , продужетак странице AB преко тачке B и продужетак странице AC преко тачке C . Слично се дефинишу приписани кругови наспрам темена B и C .



Среда, 24. јул 2013.

4. задатак. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC , а W тачка на страници BC различита од темена B и C . Тачке M и N су подножја висина из темена B и C , редом. Нека је ω_1 описани круг троугла BWN , а X тачка на ω_1 таква да је WX пречник круга ω_1 . Аналогно, нека је ω_2 описани круг троугла CWM , а Y тачка на ω_2 таква да је WY пречник круга ω_2 . Доказати да су тачке X , Y и H колинеарне.

5. задатак. Нека је $\mathbb{Q}_{>0}$ скуп свих позитивних рационалних бројева. Нека функција $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ задовољава следећа три услова:

- (i) за све $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) за све $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) постоји рационалан број $a > 1$ такав да је $f(a) = a$.

Доказати да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

6. задатак. Дат је природан број $n \geq 3$, и $n + 1$ тачака на кругу које га деле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима $0, 1, \dots, n$, где се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем круга. Означавање се назива *лепим* ако, за сваке четири ознаке $a < b < c < d$ за које је $a + d = b + c$, тетива која спаја тачке означене са a и d не сече тетиву која спаја тачке означене са b и c .

Нека је M број лепих означавања, а N број уређених парова (x, y) природних бројева таквих да је $x + y \leq n$ и $\text{НЗД}(x, y) = 1$. Доказати да је

$$M = N + 1.$$