ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ ЗА МЕЂУНАРОДНУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 27. април 2013.

1. За полиноме $A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ и $B(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ $(a_n b_m \neq 0)$ кажемо да су *слични* ако важе следећи услови:

(i) $n = m$;

(ii) Постоји пермутација π скупа $\{0, 1, \ldots, n\}$ таква да је $b_i = a_{\pi(i)}$ за свако $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ слични полиноми са целобројним коефицијентима. Ако је $P(16) = 3^{2012}$, колико најмање може бити $|Q(3^{2012})|$?

(Милош Милосављевић)

2. У оштроуглом троуглу ABC $(AB \neq AC)$ са углом α код темена A, тачка E је Ојлеров центар, а P тачка на дужи AE. Ако је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = x$, доказати да је $x = 90^\circ - 2\alpha$. *(Душан Ђукић)*

3. Дат је прост број $p > 3$. За произвољан скуп $S \subseteq \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z}$, нека је

$$S_a = \{x \in \{0, 1, ..., p-1\} \mid (\exists s \in S)\ x \equiv_p a \cdot s\}.$$

(а) Колико има скупова $S \subseteq \{1, 2, ..., p-1\}$ таквих да низ $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ садржи тачно два различита члана?

(б) Одредити све могуће вредности броја $k \in \mathbb{N}$ за које постоји скуп $S \subseteq \{1, 2, ..., p-1\}$ такав да низ $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ садржи тачно k различитих чланова. *(Милан Башић, Милош Милосављевић)*

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Како је $3^{2012} \equiv 1 \pmod 5$, важи $Q(3^{2012}) \equiv Q(1) = P(1) \equiv P(16) \equiv 1 \pmod 5$, дакле $|Q(3^{2012})| \geqslant 1$.

Конструисаћемо полиноме P и Q који задовољавају услове задатка и за које је $Q(3^{2012}) = 1$. Полиноме тражимо у облику $P(x) = ax^2 + bx + c$ и $Q(x) = cx^2 + ax + b$. За $m = 16$ и $n = 3^{2012}$, потребно нам је да систем једначина

$$\begin{cases} am^2 + bm + c = n \\ cn^2 + an + b = 1 \end{cases}$$

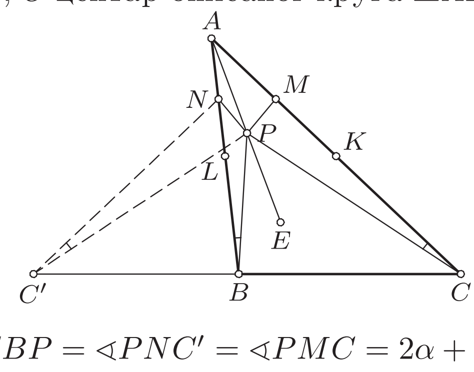
има бар једно целобројно решење (a, b, c). Заменом $c = n - am^2 - bm$ у другу једначину добијамо $n^2(n-am^2-bm)+an+b = 1$, тј. $n(m^2n-1)a+(mn^2-1)b = n^3-1$; довољно је да ова једначина има целобројно решење (a, b), а то ће да се деси ако и само ако нзд$(n(m^2n-1), mn^2-1) \mid n^3-1$. Покажимо да је ово тачно: ако $d \mid n(m^2n-1)$ и $d \mid mn^2-1$, онда $d \mid n(m^2n-1)-m(mn^2-1) = m-n$, и одатле $d \mid mn^2 - 1 + n^2(n-m) = n^3 - 1$.

Друго решење. Доказ да је $Q(3^{2012}) \neq 0$ спроводимо као у првом решењу.

Како бисмо постигли да важи $Q(3^{2012}) = 1$, а знамо да је $P(3^{2012}) \equiv Q(3^{2012}) \pmod{3^{2012} - 1}$, наметнимо услов $P(3^{2012}) = P(16) = 3^{2012}$. Полином P је облика $P(x) = (x-16)(x-3^{2012})S(x)+3^{2012}$. Ако бисмо успели да одаберемо полином S тако да је $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + (c+1)x + c$ за неко $c \in \mathbb{Z}$, тада бисмо узимањем $Q(x) = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + cx + (c+1)$ добили управо $Q(3^{2012}) = P(3^{2012}) - (3^{2012} - 1) = 1$.

Потражимо полином $S(x)$ у облику $ax + b$. Последња два коефицијента у $P(x)$ су редом $16 \cdot 3^{2012}a - (16 + 3^{2012})b$ и $16 \cdot 3^{2012}b + 3^{2012}$. Довољно је одабрати a и b тако да је $16 \cdot 3^{2012}a - (16 \cdot 3^{2012} + 16 + 3^{2012})b - 3^{2012} = 1$, а ово је могуће јер су $16 \cdot 3^{2012}$ и $16 \cdot 3^{2012} + 16 + 3^{2012}$ узајамно прости.

2. Нека су K и L редом средишта AC и AB, O центар описаног круга $\triangle ABC$, и $M \in AC$, $N \in AB$ тачке такве да је $PM \parallel EK$ и $PN \parallel EL$. Имамо $\sphericalangle PMC = \sphericalangle EKC = \sphericalangle LKC - \sphericalangle LKE = 180^\circ - \gamma - \sphericalangle CBO = 2\alpha + \beta - 90^\circ$.



Нека је C' тачка симетрична тачки C у односу на симетралу дужи MN ($C' \not\equiv B$ због $AB \neq AC$). Тачке B, P, N и C' су на кругу јер је $\sphericalangle NC'P = \sphericalangle NBP = x$. Одавде следи $\beta - x = \sphericalangle CBP = \sphericalangle PNC' = \sphericalangle PMC = 2\alpha + \beta - 90^\circ$, одакле следи тврђење.

Друго решење. Синусна Чевина теорема за тачку P у троуглу ABC даје $\frac{\sin\sphericalangle CAE}{\sin\sphericalangle EAB} = \frac{\sin\sphericalangle PBC}{\sin\sphericalangle PCB} = \frac{\sin(\beta-x)}{\sin(\gamma-x)}$. С друге стране, по истој теореми за тачку E у $\triangle AKL$ је $\frac{\sin\sphericalangle CAE}{\sin\sphericalangle EAB} = \frac{\sin\sphericalangle AKE}{\sin\sphericalangle ELA} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$. Из ове две једнакости следи

$$\begin{aligned}
0 &= \sin(\beta-x)\cos(\beta-\alpha) - \sin(\gamma-x)\cos(\gamma-\alpha) \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin(2\beta-\alpha-x) + \sin(\alpha-x) - \sin(2\gamma-\alpha-x) - \sin(\alpha-x)) \\
&= \sin(\beta-\gamma)\cos(180^\circ - 2\alpha - x),
\end{aligned}$$

па је $x = 90^\circ - 2\alpha$.

3. Нека је g примитиван корен по модулу p. Скупови $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ су скупови $S_1, S_g, \ldots, S_{g^{p-2}}$ неким редом. Низ $S_1, S_g, S_{g^2}, \ldots$ има период $p-1$, па његов минимални период d дели $p-1$. При том су скупови $S_1, S_g, \ldots, S_{g^{d-1}}$ међусобно различити (ако је $S_{g^i} = S_{g^j}$, онда је $S_1 = S_{g^{|j-i|}}$). Надаље су сва множења по модулу p.

(б) Из претходног следи да $k \mid p-1$. С друге стране, за $k \mid p-1$ можемо узети $S = \{1, g^k, g^{2k}, \ldots\}$.

(а) Минимални период низа $S_1, S_g, S_{g^2}, \ldots$ је 2, дакле $S_0 = S_2 \neq S_1$. То значи да $x \in S \Rightarrow g^2 x \in S$. Ако $a, ga \in S$, онда су по претходном сви $g^n a$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ у S, тј. $S = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ што није могуће. Према томе, $x \in S \Rightarrow gx \notin S$, $g^2 x \in S$. Одавде следи да је S један од скупова $\{1, g^2, g^4, \ldots, g^{p-3}\}$ и $\{g, g^3, \ldots, g^{p-2}\}$, тј. постоје два таква подскупа.