International Mathematical Arhimede Contest - 7$^{\text{th}}$ Edition

Bucharest , June 24-29, 2013

Први дан

1. Доказати да међу свака три различита цела броја постоје два, рецимо a и b, таква да је број $a^5b^3 - a^3b^5$ дељив са 10.

2. За сваки природан број n посматрајмо број $a_n = 4^{6^n} + 1943$. Доказати да је a_n дељиво са 2013 за све $n \geqslant 1$ и наћи све вредности n за које је $a_n - 207$ куб неког природног броја.

3. Нека је ABC троугао у коме је $\sphericalangle ABC = 120^\circ$ и A_1, B_1, C_1 редом пресеци симетрала углова код A, B, C са наспрамним страницама. Тачка F је подножје нормале из B_1 на A_1C_1. Нека су R, I и S центри уписаних кругова троуглова C_1B_1F, $C_1B_1A_1$ и A_1B_1F редом. Ако се праве B_1S и A_1C_1 секу у Q, доказати да тачке R, I, S и Q леже на истом кругу.

Други дан

4. Нека су p и n природни бројеви, при чему је p прост и $p < n$. Ако $p \mid n+1$ и нзд$([\frac{n}{p}], (p-1)!) = 1$, доказати да $p[\frac{n}{p}]^2$ дели $\binom{n}{p} - [\frac{n}{p}]$. ($[x]$ означава највећи цео број не већи од реалног броја x.)

5. Троугао ABC је уписан у круг Γ. Симетрале углова ABC и ACB поново секу Γ у E и F редом. Ако права EF додирује уписани круг γ троугла ABC, одредити $\sphericalangle BAC$.

6. Дат је непаран природан број p. Наћи све природне бројеве $n \geqslant 2$ такве да неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)^p \geqslant 0$$

важи за све реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.