ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ДРУГУ ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 28. октобар 2012.

1. Посматрајмо разбијања квадрата странице 2012 на правоугаонике код којих је једна страница дужине 1, а друга целобројне дужине. Колико се највише таквих разбијања може направити тако да никоја два разбијања немају идентичне правоугаонике на истом месту?

2. Нека је O центар описане кружнице, а AD $(D \in BC)$ симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ABC. Нека је l права кроз O паралелна са AD. Доказати да l пролази кроз ортоцентар троугла ABC ако и само ако је ABC једнакокрак или $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.

3. Нека су $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ низови дати са $a_0 = b_0 = 1$ и за $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} - 2b_{n-1}, \\ b_n &= 2a_{n-1} + 4b_{n-1}. \end{aligned}$$

Нека је $c_n = a_n + b_n$ за $n \geqslant 0$. Доказати да не постоје различити природни бројеви k, r и m такви да је $c_r^2 = c_k \cdot c_m$.

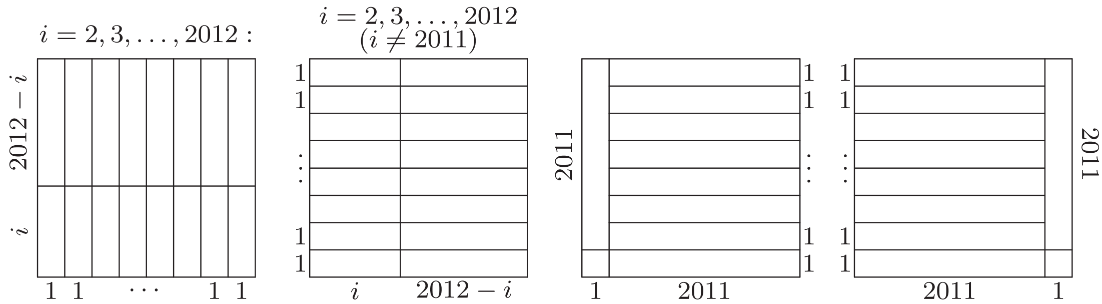
4. Нека је $ABCD$ квадрат равни $\mathcal{P}$. Одредити минималну и максималну вредност функције $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ дате са

$$f(P) = \frac{PA + PB}{PC + PD}\,.$$

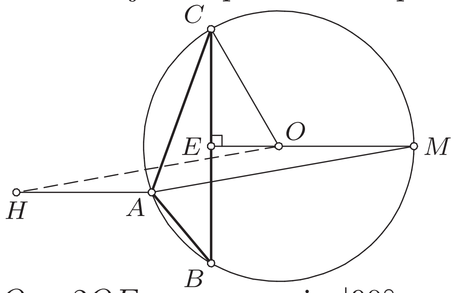
Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1. За правоугаоник који покрива доњи леви угао има 4023 могућности. С друге стране, пример 4023 разбијања која задовољавају услове је приказан на слици. Према томе, одговор је 4023.



2. Претпоставимо да је $OH \parallel AD$ и $AB \neq AC$. Нека је E средиште странице BC, а $M \neq A$ тачка пресека праве AD и описаног круга $\triangle ABC$. Знамо да је $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$. С друге стране, четвороугао $AMOH$ је паралелограм јер је $AH \parallel OM$ и $AM \parallel OH$, па имамо $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{OE}$. Одавде је тачка O ван троугла ABC, и одатле $\sphericalangle BAC = \alpha > 90^\circ$, Шта више, из $CO = MO = 2OE$ следи да је $|90^\circ - \alpha| = \sphericalangle OCE = 30^\circ$, па је $\alpha = 120^\circ$.

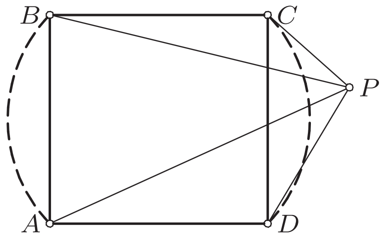


3. Из прве релације имамо $b_{n-1} = \frac{9}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_n$ и $b_n = \frac{9}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$. Убацивањем ових једнакости у другу релацију добијамо $a_{n+1} - 13a_n + 40a_{n-1} = 0$. Како је $x^2 - 13x + 40 = (x-5)(x-8)$, општи члан низа a_n има облик $a_n = A\cdot 5^n + B\cdot 8^n$. Узимајући у обзир да је $a_0 = 1$ и $a_1 = 7$, налазимо $A = \frac{1}{3}$ и $B = \frac{2}{3}$. Сада је $a_n = \frac{5^n+2\cdot 8^n}{3}$, а одатле добијамо и $b_n = \frac{9}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{2\cdot 5^n + 8^n}{3}$. Најзад,

$$c_n = 5^n + 8^n.$$

Претпоставимо да је $c_k c_m = c_r^2$ за неке $k, m, r \in \mathbb{N}$. Како је $8^n < c_n < 2\cdot 8^n$, важи $8^{k+m} < c_k c_m < 4\cdot 8^{k+m}$ и $8^{2r} < c_r^2 < 4\cdot 8^{2r}$, па мора бити $k+m = 2r$. Сада је $0 = c_k c_m - c_r^2 = 8^k 5^m + 8^m 5^k - 2\cdot 8^r 5^r = (8^{k/2}5^{m/2} - 8^{m/2}5^{k/2})^2$, одакле следи $m = k = r$.

4. Птоломејева неједнакост за четвороугао $BCPD$ даје $BC\cdot PD + BD\cdot PC \geqslant CD\cdot PB$, тј. $PD + PC\sqrt{2} \geqslant PB$. Слично важи $PC + PD\sqrt{2} \geqslant PA$. Сабирањем ове две неједнакости добија се $(PC+PD)(\sqrt{2}+1) \geqslant PA+PB$, тј. $f(P) \leqslant \sqrt{2}+1$. Ова вредност се достиже када је P на краћем луку CD круга $ABCD$.



Аналогно је $(PA+PB)(\sqrt{2}+1) \geqslant PC+PD$, тј. $f(P) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$, а ова вредност се достиже за када је P на краћем луку AB круга $ABCD$.