30. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Агрос, Кипар – 30. јун 2013.

1. У троуглу ABC, спољa приписани круг наспрам темена A додирује праву AB у тачки P и праву AC у тачки Q, а спољa приписани круг наспрам темена B додирује праву AB у тачки M и праву BC у тачки N. Нека су K и L подножја нормала из C на праве MN и PQ, редом.
Доказати да је четвороугао $MKLP$ тетиван. *(Бугарска)*

2. Одредити све природне бројеве x, y и z такве да важи

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

(Србија)

3. Нека је $\mathbb{R}_+$ скуп позитивних реалних бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ такве да за све позитивне реалне бројеве x, y, z и k важе следећа три услова:

(i) $xf(x,y,z) = zf(z,y,x)$;

(ii) $f(x,ky,k^2z) = kf(x,y,z)$;

(iii) $f(1,k,k+1) = k+1$. *(Велика Британија)*

4. На математичком такмичењу неки учесници су пријатељи; пријатељство је узајамно, тј. ако је A пријатељ са B, тада је и B пријатељ са A. За (различите) такмичаре $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где је $n \geqslant 3$, кажемо да чине *скоро пријатељски циклус* ако A_i није пријатељ са A_{i+1} за $1 \leqslant i \leqslant n$ ($A_{n+1} = A_1$), док су сви остали парови такмичара из овог циклуса пријатељи.
При томе, на овом такмичењу важи:

> За сваког такмичара C и сваки скоро пријатељски циклус $\mathscr{S}$ који не садржи C, скуп такмичара D из $\mathscr{S}$ који нису пријатељи са C има највише један елемент.

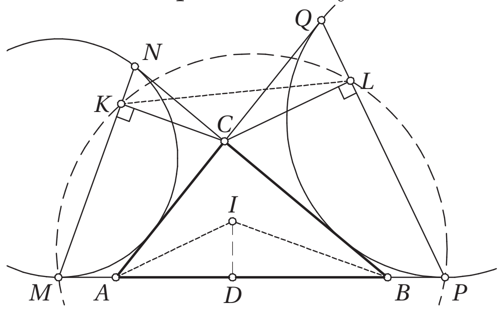
Доказати да се сви такмичари могу распоредити у три собе тако да су свака два такмичара који се налазе у истој соби пријатељи. *(Србија)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Углове троугла обележавамо уобичајено са α, β и γ. Како је $\angle KMP = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, довољно је показати да је $\angle KLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$, тј. да је $\angle KLC = \frac{\beta}{2}$.

Нека је I центар уписаног круга троугла ABC и D додирна тачка уписаног круга са AB. Како је $CK \parallel IB$ и $CL \parallel IA$, важи $\angle KCL = \angle AIB$. Даље, из $CN = AD = \frac{b+c-a}{2}$ и $\angle KCN = \frac{\beta}{2}$ имамо $CK = CN \cos\frac{\beta}{2} = AD \cos\frac{\beta}{2} = AI \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}$ и аналогно $CL = BI \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}$, одакле је $\frac{CK}{CL} = \frac{AI}{BI}$. Следи да су троуглови KCL и AIB слични, па је $\angle KLC = \angle ABI = \frac{\beta}{2}$.



2. Свођење по модулу 11 даје $x^5 + 4^y \equiv 0 \pmod{11}$, при чему је $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$, па мора бити $4^y \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Једнакост $4^y \equiv -1 \pmod{11}$ не важи ни за једно y, док $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ важи ако и само ако $5 \mid y$.

Стављањем $t = 4^{y/5}$ једначина постаје $x^5 + t^5 = A \cdot B = 2013^z$, где је $(x, t) = 1$ и $A = x + t$, $B = x^4 - x^3 t + x^2 t^2 - x t^3 + t^4$. Даље, из $B = A(x^3 - 2x^2 t + 3x t^2 - 4t^3) + 5t^4$ следи да је $(A, B) = (A, 5t^4) \mid 5$, али $5 \nmid 2013^z$, па мора бити $(A, B) = 1$. Следи да је $A = a^z$ и $B = b^z$ за неке природне бројеве a и b са $a \cdot b = 2013$.

Међутим, из $\frac{1}{16} A^4 \leqslant B \leqslant A^4$ (што се доказује једноставном применом неједнакости између средина) добијамо $\frac{1}{16} a^4 \leqslant b \leqslant a^4$, тј. $\frac{1}{16} a^5 \leqslant ab = 2013 \leqslant a^5$. Одавде је $5 \leqslant a \leqslant 8$, што је немогуће јер 2013 нема делилаца у интервалу $[5, 8]$.

3. Из својстава функције f добијамо да за све $x, y, z, a, b > 0$ важи

$$f(a^2 x, aby, b^2 z) = b f(a^2 x, ay, z) = b \cdot \frac{z}{a^2 x} f(z, ay, a^2 x) = \frac{bz}{ax} f(z, y, x) = \frac{b}{a} f(x, y, z).$$

Подесићемо a и b тако да је тројка $(a^2 x, aby, b^2 z)$ облика $(1, k, k+1)$ за неко k: узећемо $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и b тако да је $b^2 z - aby = 1$, што решавањем квадратне једначине даје $b = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2z\sqrt{x}}$ и $k = \frac{y(y + \sqrt{y^2 + 4xz})}{2xz}$. Сада лако добијамо

$$f(x, y, z) = \frac{a}{b} f(a^2 x, aby, b^2 z) = \frac{a}{b} f(1, k, k+1) = \frac{a}{b}(k+1) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}.$$

Директно се проверава да f задовољава услове задатка.

4. Посматрајмо граф $\mathscr{G}$ чији чворови одговарају такмичарима, при чему су два чвора спојена граном ако и само ако одговарајући такмичари нису пријатељи.

Лема. Граф $\mathscr{G}$ садржи чвор степена највише 2.

Доказ. Претпоставимо да је сваки чвор степена бар три. Посматрајмо најдужи индуковани пут $P = u_0u_1u_2\dots u_k$ у графу (пут у коме никоја два несуседна чвора нису спојена). Чвор u_0 је повезан са бар још два чвора v и w, и они су ван пута P. Како је P најдужи индуковани пут, v и w морају имати суседе на том путу. Нека су u_i и u_j суседи v и w редом са најмањим i, j и нека је без смањења општости $i \geqslant j$. Тада $u_0, u_1, \dots, u_i, v$ чине скоро пријатељски циклус, а на њему w има два суседа (u_0 и u_j), контрадикција.

Вратимо се на задатак и докажимо га индукцијом по броју n чворова у $\mathcal{G}$. За $n \leqslant 3$ тврђење је тривијално; претпоставимо да оно важи за $n-1$ и докажимо га за n. На основу Леме, у $\mathcal{G}$ постоји чвор v степена највише два. Граф $\mathcal{G}'$, добијен брисањем чвора v и свих грана које полазе из њега, очигледно задовољава услове задатка, па се његови чворови могу поделити у три собе на жељени начин. Притом v нема суседа у бар једној соби, па га можемо убацити у ту собу. Овим је доказ завршен.