



**30th Balkan Mathematical Olympiad
28 June - 3 July 2013, Agros - Cyprus**

**Contest day: Sunday 30 June 2013, 10.00 - 14.30
Place: RODON Resort, Agros**

LANGUAGE: BIH SERBIAN

Прије почетка рада прочитајте упутства која сте добили.

Сваки задатак вриједи 10 бодова.

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута.

Задатак 1. У троуглу ABC споља приписана кружница насупрот тјемева A додирује праву AB у тачки P и праву AC у тачки Q , а споља приписана кружница насупрот тјемева B додирује праву AB у тачки M и праву BC у тачки N . Нека је K подножје нормале из тачке C на праву MN , а L подножје нормале из тачке C на праву PQ .

Доказати да је четвороугао $MKLP$ тетиван.

Задатак 2. Одредити све природне бројеве x , y и z такве да важи

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Задатак 3. Нека је \mathbb{R}_+ скуп позитивних реалних бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ такве да за све позитивне реалне бројеве x , y , z и k важе следећа три услова:

а) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$,

б) $f(x, ky, k^2z) = kf(x, y, z)$,

в) $f(1, k, k+1) = k+1$.

Задатак 4. На математичком такмичењу неки учесници су пријатељи; пријатељство је узајамно, тј. ако је A пријатељ са B тада је и B пријатељ са A . За (различите) такмичаре A_1, A_2, \dots, A_n , гдје је $n \geq 3$, кажемо да чине *скоро пријатељски циклус* ако A_i није пријатељ са A_{i+1} , за $1 \leq i \leq n$, $A_{n+1} = A_1$, док су сви остали парови такмичара из овог циклуса пријатељи.

При томе, на овом такмичењу важи:

за сваког такмичара C и сваки *скоро пријатељски циклус* \mathcal{S} такмичара који не садржи C , скуп такмичара D из \mathcal{S} који нису пријатељи са C има највише један елемент.

Доказати да се сви такмичари могу распоредити у три собе, тако да су свака два такмичара који се налазе у истој соби пријатељи.