33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša jesenja varijanta, 9.10.2011.

Mladji uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	Na najdužoj stranici AB, trougla ABC, uočene su tačke P i Q takve da je $AQ = AC$ i $BP = BC$. Dokazati da se centar opisane kružnice oko trougla PQC poklapa sa centrom upisane kružnice u trougao ABC.
4	2.	Za okruglim stolom sedi nekoliko gostiju koji jedu bobice iz korpice u kojoj ima 2011 bobica. Svaki gost je pojeo ili duplo više bobica ili 6 bobica manje od svog suseda sa desne strane. Dokazati da gosti nisu pojeli sve bobice.
4	3.	Iz table 9×9 (koja sadrži 81 jedinično polje) izbačena su sva jedinična polja koja se nalaze u parnim vrstama i parnim kolonama (time je izbačeno 16 jediničnih polja). Iseći tako dobijenu tablu na pravougaonike tako da broj pravougaonika koji su dimenzija 1×1 bude što manji.
4	4.	Iznad svakog temena tridesettrougla zapisan je prirodan broj koji je izmedju 1 i 33, pri čemu je svaki broj od 1 do 33 zapisan tačno jednom. Nakon ovoga je iznad svake stranice zapisan broj koji je jednak zbiru brojeva koji su zapisani iznad temena koja su krajnje tačke te stranice. Da li je moguće da su na taj način, iznad stranica, dobijena (u nekom poretku) 33 uzastopna prirodna broja?
5	5.	Na pravolinijskom putu u jednom smeru kreću se pešak i biciklista, a u drugom (suprotnom) motociklista i automobil. Brzine svih učesnika su konstantne (svako ima svoju konstantnu brzinu). Biciklista je najpre sustigao pešaka, posle odredjenog vremena je susreo motociklistu, a nakon isto toliko vremena (vreme koje je proteklo od sustizanja pešaka do susreta sa motociklistom) susreo se sa automobilom. Automobil se najpre susreo sa biciklistom, posle odredjenog vremena susreo se sa pešakom, a nakon isto toliko vremena (vreme koje je proteklo od susreta sa biliklistom do sustera sa pešakom) sustigao je motociklistu. Poznato je da je biciklista sustigao pešaka u 10 časova, a susret pešaka i automobila dogodio se u 11 časova. U koliko sati se dogodio susret pešaka i motocikliste?

33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša jesenja varijanta, 9.10.2011.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak
3	1. Za okruglim stolom sedi nekoliko gostiju koji jedu bobice iz korpice u kojoj ima 2011 bobica. Svaki gost je pojeo ili duplo više bobica ili 6 bobica manje od svog suseda sa desne strane. Dokazati da gosti nisu pojeli sve bobice.
4	2. U svako polje tajne tablice $n \times n$ upisana je jedna cifra od 1 do 9. Pomoću nje je formirano ukupno $2n$ $n-$tocifrenih brojeva - svaka vrsta, odnosno svaka kolona predstavlja $n-$tocifreni broj. Peca želi da napiše $n-$tocifreni broj koji ne sadrži cifru 0, takav da se taj broj, kao i broj koji se dobije suprotnim redosledom cifara ne nalazi medju formiranim brojevima. Zbog toga on mora da sazna nekoliko cifara koje su upisane u polja tajne tablice. Koliko najmanje cifara mora da sazna da bi sigurno uspeo u svojoj nameri?
4	3. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ dužine stranica su: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$ i $AD = 5$. Odrediti ugao izmedju dijagonala tog četvorougla.
4	4. Za prirodne brojeve $a < b < c$ važi $b - a \mid b + a$ i $c - b \mid c + b$. Poznato je da broj a ima 2011, a broj b 2012 cifara. Koliko cifara ima broj c?
5	5. U ravni je dato 10 pravih u opštem položaju (nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri nemaju zajedničku tačku). Za svaku presečnu tačku tih pravih uočen je manji ugao koji obrazuju prave koje prolaze kroz tu tačku. Koliko najviše može biti zbir svih tako uočenih uglova?

33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Teža jesenja varijanta, 23.10.2011.

Mladji uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	Na tabli je zapisan prirodan broj $N > 1$. Saša nastavlja da zapisuje prirodne brojeve na tabli u niz. Novi broj dobija tako što poslednjem zapisanom broju doda ili oduzme neki njegov (koji želi) delilac veći od 1. Saša želi da u nekom trenutku na tabli dobije broj 2011. Da li može ovo da postigne bez obzira na prvozapisani broj $N > 1$?
4	2.	Na stranici AB, trougla ABC, uočena je tačka P, takva da je $AP = 2PB$. Neka je tačka Q središte duži AC. Ispostavilo se da je $CP = 2PQ$. Dokazati da je ABC pravougli trougao.
5	3.	U nizu je nekoliko tegova, pri čemu su svaka dva tega različite težine. Poznato je da ako na levi tas terazija stavimo proizvoljna dva tega, medju ostalim tegovima možemo pronaći jedan ili više tegova koji će stavljeni na desni tas terazija dovesti do ravnoteže. Koliko najmanje tegova može biti u tom nizu?
6	4.	Na nekom polju prve kolone (skroz levo) tablice koja ima 2012 vrsta i $k > 2$ kolona postavljen je žeton. Dva igrača naizmenično pomeraju žeton, pri čemu je u jednom potezu moguće pomeriti žeton za jedno polje na gore, na dole ili desno, ali obavezno na polje gde žeton u toku igre nije već bio. Igra se završava onog trenutka kada žeton prvi put dospe u poslednju (skroz desnu) kolonu. Medjutim, igrači ne znaju da li je onaj koji dovede žeton u poslednju kolonu pobednik ili poraženi. To im se saopštava tek u momentu kada žeton prvi put dospe u pretposlednju kolonu. Da li neki od igrača ima pobedničku strategiju?
6	5.	Neka su $a, b, c, d \in (0, 1)$, takvi da je $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Dokazati nejednakost $$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$
7	6.	Automobil se kreće po pravolinijskom putu konstanstnom brzinom $60km/h$. Nedaleko od puta, paralelno sa njim, nalazi se ograda dužine 100m. Svake sekunde, tokom celokupnog putovanja, suvozač automobila snima (beleži) ugao pod kojim se tog trenutka vidi ograda. Dokazati da je zbir svih tako snimljenih (zabeleženih) uglova manji od 1100^0.
9	7.	Temena pravilnog 45−tougla obojena su pomoću tri boje, pri čemu je svaka od njih korišćena po 15 puta. Dokazati da postoje tri podudarna trougla tako da su temena prvog obojena prvom, temena drugog obojena drugom, a temena trećeg obojena trećom bojom.

33. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Teža jesenja varijanta, 23.10.2011.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
4	1.	Peca je u ravni obeležio nekoliko (bar tri) tačaka, tako da su (svaka dva) rastojanja medju njima medjusobno različita. Za par A, B obeleženih tačaka kažemo da je neobičan ako je A najudaljenija tačka od tačke B i ako je B najbliža tačka tački A (ne računajući samu tačku A). Koliko najviše neobičnih parova može dobiti Peca?
4	2.	Neka su $a, b, c, d \in (0,1)$, takvi da je $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Dokazati nejednakost $$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d) \geq 1.$$
5	3.	Neka su A_1, B_1 i C_1 podnožja visina konstruisanih, redom, iz temena A, B i C trougla ABC. Označimo, redom, sa C_A i C_B podnožja normala iz tačke C_1 na AC i BC. Dokazati da prava C_AC_B polovi duži C_1A_1 i C_1B_1.
	4.	Da li postoji konveksan $N-$tougao sa svim jednakim stranicama, čija sva temena pripadaju paraboli $y = x^2$, ako je
3	a)	$N = 2011$;
4	b)	$N = 2012$?
7	5.	Prirodan broj je *dobar* ako njegov dekadni zapis ne sadrži cifru 0. Za *dobar* broj kažemo da je *poseban* ako njegov dekadni zapis sadrži najmanje k cifara i cifre čine strogo rastući niz (gledano sa leva na desno). U jednom potezu *dobrom* broju možemo umetnuti izmedju ma koje dve cifre *poseban* broj ili mu dopisati (sa leve ili desne strane) *poseban* broj ili mu pak izbrisati niz uzastopnih cifara koje čine *poseban* broj. Odrediti najveći broj k za koji je moguće od proizvoljnog *dobrog* broja, nizom poteza, dobiti proizvoljan *dobar* broj.
7	6.	Neka je $n > 1$ prirodan broj. Dokazati da je broj $1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n-1)^{2^n-1}$ deljiv sa 2^n, ali nije deljiv sa 2^{n+1}.
9	7.	Data je plava kružnica. Na njoj je obeleženo 100 crvenih tačaka, tako da je te tačke dele na 100 kružnih lukova čije su dužine, nekim redosledom, 1,2,...,100. Dokazati da postoje dve tetive koje su medjusobno normalne i čije su krajnje tačke obeležene crvenom bojom.