# Изборно такмичење за 5. RMMC

(Romanian Master of Mathematics Competition)

**Уторак, 7. фебруар 2012.**

**1.** Реални бројеви $a_i$, $b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ задовољавају $0 \leqslant b_k \leqslant 1$ за све $k$ и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n+1} = 0$. Доказати неједнакост

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1}^{B+1} a_k,$$

где је $B = [\sum_{k=1}^{n} b_k]$.

**2.** У унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ који није трапез, дата је тачка $X$ таква да је $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX < 90^\circ$ и $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX < 90^\circ$. Ако се симетрале страница $AB$ и $CD$ секу у тачки $Y$, доказати да је $\sphericalangle AYB = 2\sphericalangle ADX$.

**3.** Наћи сва решења $(x, y)$ једначине

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = 2$$

у скупу рационалних бројева.

**4.** У групи од $2n + 1$ људи $(n \in \mathbb{N})$, за сваких $n$ особа постоји једна од преосталих која их све познаје. Доказати да у овој групи постоји особа која познаје све остале.

*Време за рад: 4 сата.*
*Сваки задатак вреди 10 поена.*

# Доигравање за 5. RMMC

(Romanian Master of Mathematics Competition)

**Петак, 10. фебруар 2012.**

**1.** Дат је природан број $n$. Посматрајмо све тројке $(a, b, c)$ различитих природних бројева са $a + b + c = n$. Означимо са $K(n)$ највећи могући број таквих тројки које се могу изабрати тако да никоје две немају заједнички елемент. Доказати да је $[\frac{n-1}{5}] \leqslant K(n) < \frac{2n}{9}$.

**2.** Решити једначину

$$11^a 5^b - 3^c 2^d = 1$$

у скупу ненегативних целих бројева.

**3.** Нека су $r$ и $R$ редом полупречници уписаног и описаног круга троугла $ABC$. Нека је $r_a$ полупречник круга $\gamma_a$ који изнутра додирује описани круг у тачки $A$, а споља додирује уписани круг. Аналогно се дефинишу $r_b$ и $r_c$. Доказати неједнакост

$$\frac{R - r_a}{r + 4r_a} + \frac{R - r_b}{r + 4r_b} + \frac{R - r_c}{r + 4r_c} \geqslant \frac{3R}{4r}\,.$$

*Време за рад: 3 сата.*
*Сваки задатак вреди 10 поена.*

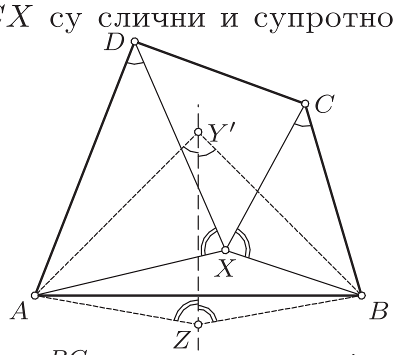
## РЕШЕЊА

**1.1.** Означимо са $L$ и $D$ редом леву и десну страну тражене неједнакости, фиксирајмо све $b_i$ и посматрајмо $f(a_1, \ldots, a_n) = D - L$.

Функција $f$ је линеарна по свакој променљивој $a_k$, па зато достиже минимум на једном крају интервала, дакле за $a_k = a_{k-1}$ или $a_k = 0$ (при чему додефинишемо $a_0 = 0$). Овако можемо да претпоставимо без смањења општости да за свако $a_k$ важи $a_k = a_{k-1}$ или $a_k = 0$.

Нека је сада $a_1 = \cdots = a_m = a$ и $a_{m+1} = \cdots = a_{n+1} = 0$. Тада је $L = a\sum_{i=1}^{m} b_i \leqslant (B+1)a = \sum_{i=1}^{B+1} a = D$, чиме је доказ неједнакости завршен.

**1.2.** По услову задатка, троуглови $ADX$ и $BCX$ су слични и супротно оријентисани. Нека су $Y'$ и $Z$ тачке на симетрали дужи $AB$ такве да су троуглови $AY'Z$ и $ADX$ слични и исто оријентисани. Тада су и троуглови $BY'Z$ и $BCX$ слични и исто оријентисани. Такође, због $\frac{AD}{AY'} = \frac{AX}{AZ}$ и $\sphericalangle DAY' = \sphericalangle XAZ$ имамо $\triangle ADY' \sim \triangle AXZ$, одакле је $\frac{AD}{AX} = \frac{DY'}{XZ}$. Аналогно је $\frac{BC}{BX} = \frac{CY'}{XZ}$. Сада из $\frac{AD}{AX} = \frac{BC}{BX}$ следи да је $CY' = DY'$, дакле $Y'$ лежи на симетрали дужи $CD$, па је $Y' \equiv Y$.




Дакле, $\sphericalangle AYB = 2\sphericalangle AYZ = 2\sphericalangle ADX$, што је и требало доказати.

**1.3.** Из једначине добијамо $y^2 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, што се може написати као $1 - x^4 = z^2$, где је $z = (1+x^2)y$. Стављањем $x = \frac{b}{a}$ и $z = \frac{c}{a^2}$ последња једначина се своди на

$$a^4 - b^4 = c^2. \tag{$*$}$$

Показаћемо да $(*)$ нема решења у целим бројевима различитим од нуле.

Подсетимо се да ако је $(x, y, z)$ примитивна Питагорина тројка, тј. $x^2 + y^2 = z^2$ за $x, y, z \in \mathbb{N}$ и $(x, y, z) = 1$, онда је

$$(x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2) \quad \text{или} \quad (x, y, z) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$$

за неке природне бројеве $u, v$.

Претпоставимо да $(*)$ има решења у $\mathbb{N}$ и да је $(a, b, c)$ решење са најмањим $a$. Очигледно су $a, b, c$ узајамно прости. Тројка $(b^2, c, a^2)$ је Питагорина, па зато важи $a^2 = m^2 + n^2$ и $b^2 \in \{2mn, m^2 - n^2\}$ за неке $m, n \in \mathbb{N}$. Ако је $b^2 = m^2 - n^2$, следи $m^4 - n^4 = (ab)^2$, али $m < a$, што је немогуће због минималности решења $(a, b, c)$. Према томе, мора бити $b^2 = 2mn$.

Даље, тројка $(m,n,a)$ је Питагорина и $(m,n,a)=1$ због $(a,b,c)=1$, па постоје $p,q\in\mathbb{N}$ такви да је $\{m,n\}=\{p^2-q^2,2pq\}$. Тада је $b^2=2mn=4pq(p^2-q^2)$. Како су бројеви $p,q,p^2-q^2$ узајамно прости по паровима, а њихов производ је квадрат, сви они морају да буду квадрати. Дакле, за неке $r,s,t\in\mathbb{N}$ важи $p=r^2$, $q=s^2$ и $r^4-s^4=p^2-q^2=t^2$. То значи да је $(r,s,t)$ решење једначине $(*)$, али $r<a$, што противречи минималности решења $(a,b,c)$.

Овим је доказано да $(*)$ нема решења у $\mathbb{Z}$ осим оних у којима је $b=0$ или $c=0$. Следи да су једина решења једначине из задатка тривијална, тј. $(x,y)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$.

**1.4.** Посматрајмо максималну групу $G$ особа које се све међусобно познају. Ако $G$ садржи мање од $n+1$ особа, онда постоји особа $x$ која их све познаје, па би се $G$ могло увећати особом $x$, што противречи претпоставци да је $G$ максимално. Следи да бар $n+1$ људи припада групи $G$.

Ван групе $G$ налази се највише $n$ људи, па постоји нека особа $y$ која их све познаје. Та особа $y$ је у $G$, па зато познаје и све остале у $G$. Према томе, $y$ познаје свих осталих $2n$ особа.

**2.1.** Нека тројке $(a_i,b_i,c_i)$, $i=1,2,\dots,K(n)$ задовољавају услове задатка. Збир свих елемената $a_i,b_i$ и $c_i$ једнак је $nK(n)$; с друге стране, он није мањи од $1+2+\cdots+3K(n)=\frac{3K(n)(3K(n)+1)}{2}$, одакле је $3(3K(n)+1)\leqslant 2n$, тј. $K(n)\leqslant\frac{2n-3}{9}$.
За $r=[\frac{n-1}{5}]$, тројке $(i,r+i,n-r-2i)$ задовољавају услове, што доказује доњу границу.

_Напомена._ Следећи примери показују да је у ствари $K(n)=[\frac{2n-3}{9}]$:

$$\begin{array}{rc}
n\geqslant 9m-3\Rightarrow K(n)\geqslant 2m-1: & (i,4m-2i,n-4m+i)_{i=1}^{m}\ \cup \\
& (m+i,4m-2i-1,n+1-5m+i)_{i=1}^{m-1} \\
n\geqslant 9m+2\Rightarrow K(n)\geqslant 2m: & (i,4m+1-2i,n-1-4m+i)_{i=1}^{m}\ \cup \\
& (m+i,4m+2-2i,n-2-5m+i)_{i=1}^{m}.
\end{array}$$

**2.2.** Јасно је да је $d>0$. Разликујемо неколико случајева.

(1°) $c>0$, $d>1$. Имамо $11^a5^b\equiv1\pmod 3\Rightarrow 2\mid a+b$ и $11^a5^b\equiv1\pmod 4\Rightarrow 2\mid a\Rightarrow 2\mid b$. Стављањем $n=11^{\frac{a}{2}}5^{\frac{b}{2}}\in\mathbb{N}$ добијамо $(n+1)(n-1)=3^c2^d$. могућа су два подслучаја.

(1°$a$) $n+1=2^{d-1}$, $n-1=2\cdot3^c\Rightarrow 2^{d-2}-3^c=1\Rightarrow 2\mid d-2\Rightarrow(2^{\frac{d-2}{2}}+1)(2^{\frac{d-2}{2}}-1)=3^c\Rightarrow 2^{\frac{d-2}{2}}\pm1$ су степени тројке, дакле једнаки су 1 и 3, што даје $(c,d)=(1,4)$, и тада нема решења за $(a,b)$.

(1°$b$) $n+1 = 2\cdot 3^c$, $n-1 = 2^{d-1} \Rightarrow 3^c - 2^{d-2} = 1$. За $d \leqslant 3$ добијамо решење $(a,b,c,d) = (0,2,1,3)$. За $d > 3$, $3^c \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2 \mid c \Rightarrow (3^{\frac{c}{2}}+1)(3^{\frac{c}{2}}-1) = 2^{d-2}$. Једина могућност је $(c,d) = (2,5)$, што нам не даје решење.

(2°) $c = 0$, тј. $11^a 5^b = 2^d + 1$. Имамо два подслучаја.

(2°$a$) $a > 0$. Тада $11 \mid 2^d + 1 \Rightarrow d \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow 2 \nmid d \Rightarrow 3 \mid 2^d + 1$, што је немогуће.

(2°$b$) $a = 0$. Тада $5^b - 1 = 2^d$. Ако је $d > 2$, онда $8 \mid 5^b - 1 \Rightarrow 2 \mid b \Rightarrow (5^{\frac{b}{2}}+1)(5^{\frac{b}{2}}-1) = 2^d$, што нема решења. Остаје могућност $(b,d) = (1,2)$, што даје решење $(a,b,c,d) = (0,1,0,2)$.

(3°) $d = 1$ и $11^a 5^b = 2\cdot 3^c + 1$. Тада $4 \nmid 11^a 5^b - 1 \Rightarrow 2 \nmid a \Rightarrow a > 0$. У овом случају користићемо релацију $11^2 \mid 3^5 - 1$. Због $11 \mid 2\cdot 3^c + 1$ важи $c \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow 2\cdot 3^c + 1 \equiv 2\cdot 3^3 + 1 = 55 \pmod{11^2}$, дакле $11^2 \nmid 2\cdot 3^c + 1 \Rightarrow a = 1$.

Сада $11\cdot 5^b = 2\cdot 3^c + 1$. За $b = 1$ имамо решење $(a,b,c,d) = (1,1,3,1)$. За $b > 1$ важи $5^2 \mid 2\cdot 3^c + 1 \Rightarrow c \equiv 7 \pmod{20} \Rightarrow c \equiv 2 \pmod 5$ што је контрадикција јер смо претходно добили $c \equiv 3 \pmod 5$.

Једина решења су $(a,b,c,d) \in \{(0,1,0,2),(0,2,1,3),(1,1,3,1)\}$.

**2.3.** Означимо са $S_a$ центар круга $\gamma_a$, а са $S$ и $O$ редом центре уписаног и описаног круга. Тачка $S_a$ лежи на дужи $OA$, па по Стјуартовој теореми важи

$$SS_a^2 = \frac{r_a}{R}SO^2 + \frac{R-r_a}{R}SA^2 - r_a(R-r_a).$$

Како је $SS_a = r + r_a$ и према Ојлеровој теореми $SO^2 = R^2 - 2Rr$, добијамо $R(r+r_a)^2 = r_a(R^2-2Rr) + (R-r_a)SA^2 - Rr_a(R-r_a)$. Ово након сређивања даје

$$r_a = \frac{R(SA^2-r^2)}{SA^2+4Rr} \quad \text{и} \quad \frac{R-r_a}{r+4r_a} = \frac{Rr}{SA^2}.$$

Аналогне изразе добијамо за $r_b$ и $r_c$, чиме се тражена неједнакост своди на $\frac{r^2}{SA^2} + \frac{r^2}{SB^2} + \frac{r^2}{SC^2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{4}$, што је еквивалентно са $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$. Последња неједнакост се једноставно доказује:

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma \\ &\leqslant 2\sin\tfrac{\gamma}{2} + \cos\gamma = 1 + 2\sin\tfrac{\gamma}{2} - 2\sin^2\tfrac{\gamma}{2} \leqslant \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$