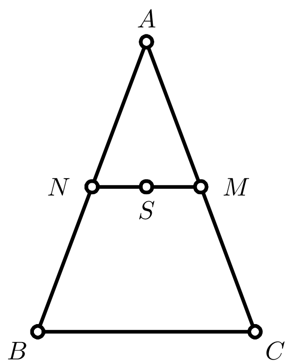
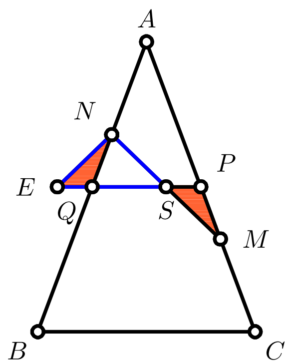
Решења за први разред – А категорија

1. Ако су тачке M и N средишта дужи AC и BC, редом, онда је MN баш средња линија троугла која одговара страници AB, па је и средиште дужи MN на тој средњој линији (слика лево).





У противном (слика десно – без умањења општости можемо узети да је тачка N ближа од M тачки A), ако су тачке P и Q, редом, средишта страница AC и BC, имамо да је $PM = QN$. Са друге стране, ако је $\{S\} = MN \cap PQ$, тада је редослед тачака $P - S - Q$ и, ако је E тачка за коју је $PS = QE$ и $P - Q - E$. Из $PM = QN$, $\sphericalangle MPS = \sphericalangle NQE$ (спољашњи углови над једнаким угловима $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AQP$) и $PS = QE$ следи подударност $\triangle PMS \cong \triangle QNE$. Одатле добијамо $\sphericalangle PSM = \sphericalangle QEN$. Како су углови $\sphericalangle MSP$ и $\sphericalangle NSQ$ једнаки као унакрсни, то је троугао $\triangle SEN$ једнакокрак. Одатле и из подударности имамо да је $SN = EN = SM$, па је S средиште дужи MN, чиме је показано тврђење задатка.

2. а) Ако је $n \equiv 0 \pmod 5$ тада је такође и $n^2 \equiv 0 \pmod 5$. Ако је $n \equiv \pm 1 \pmod 5$ тада је $n^2 \equiv 1 \pmod 5$. Ако је $n \equiv \pm 2 \pmod 5$ тада је $n^2 \equiv 4 \pmod 5$. Стога n^2 може дати само остатке 0, 1 или 4 при дељењу са 5.

б) Уколико прост број p није дељив са 5 онда је $p = 5k \pm 1$ или $p = 5k \pm 2$. За $p = 5k \pm 1$ је $p^2 \equiv 1 \pmod 5$ и $p^2 + 4 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$, тј. број $p^2 + 4 > 5$ је дељив са 5, па је он сложен. За $p = 5k \pm 2$ је $p^2 \equiv 4 \pmod 5$ и $p^2 + 6 \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$, тј. број $p^2 + 6 > 5$ је дељив са 5, па је он сложен. Значи p не може бити ни 2, ни 3, ни $p > 5$. Како су за $p = 5$ бројеви $p^2 + 4 = 29$ и $p^2 + 6 = 31$ прости, добијамо да је једино решење овог задатка $p = 5$.

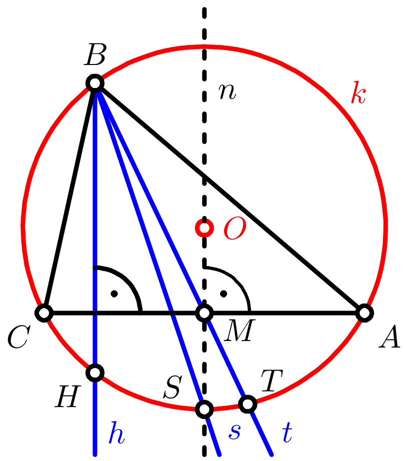
Напомена. Део под а) бодовати са 6 поена, а део под б) са 14.

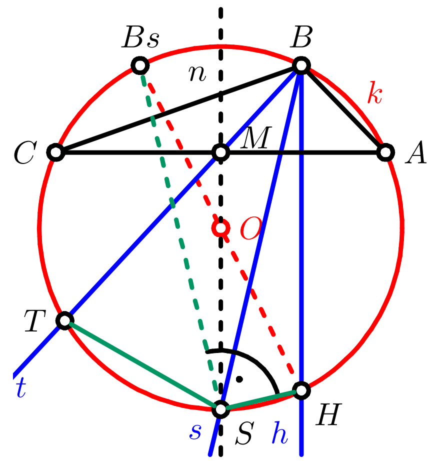
3. Након сређивања добијамо: $A = \dfrac{-3x^3 - x^2 + 12x + 4}{3x^3 + x^2 - 15x - 5} = \dfrac{(1+3x)(4-x^2)}{(1+3x)(x^2-5)} = \dfrac{4-x^2}{x^2-5} = -1 - \dfrac{1}{x^2-5}$.

Ово је цео број само уколико $(x^2 - 5) \mid 1$, а то важи само за $x = \pm 2$.

4. *Анализа.*

Симетрала угла $\sphericalangle ABC$ сече описану кружницу k у тачки S која је средиште лука $\widehat{AC}$. Стога је полупречник $OS \perp AC$ и такође, права OS полови дуж AC (тј. важи $\{M\} = OS \cap AC$ и $AM = MC$). Како права h садржи висину из темена B, важи да је $h \perp AC$, тј. $h \parallel OS$.





Конструкција.

Одредимо центар O описане кружнице око троугла $\triangle HST$, као пресек симетрала дужи HS и ST. Повуцимо праву n кроз тачке S и O. Конструишимо праву h (која садржи висину из B) као праву кроз H која је паралелна правој n. У пресеку кружнице k и праве h су тачке H и B – тако добијамо тачку B. У пресеку дужи BT и SO је тачка M која је средиште дужи AC. Праву b која садржи AC добијамо као праву нормалну на n која садржи тачку M. У пресеку праве b и кружнице k добијамо преостала два темена: A и C.

Доказ.

Како је $h \parallel OS$ имамо да је $h \perp AC$, па права h садржи висину из $B \in h$ на AC, те је стога тачка H пресек продужетка висине и описане кружнице k.

Како је $OS \perp AC$, добијамо да је S средиште лука AC, па је $\sphericalangle ABS = \sphericalangle SBC$, тј. права BS је симетрала угла $\sphericalangle ABC$, па је S пресек продужетка симетрале угла код темена B и описане кружнице k.

Како је $AM = MC$ то је M средиште странице AC, па је BM тежишна линија из темена B, те је стога тачка T пресек продужетка тежишне линије из темена B и описане кружнице k.

Дискусија.

Покажимо да угао $\sphericalangle HST$ мора бити туп.

1° Ако угао $\sphericalangle ABC$ није туп (горња слика лево), онда је редослед тачака $C - H - S - T - A$ (ако је B ближа C него A) или $C - T - S - H - A$ (ако је B ближа A него C) на луку $\widehat{CA}$. Али тада имамо да је $\sphericalangle HST > \sphericalangle CSA = 180^\circ - \sphericalangle CBA$, тј. $\sphericalangle HST$ је туп.

2° Ако је угао $\sphericalangle ABC$ туп (без умањења општости можемо узети да је тачка B ближа A него C – горња слика десно) уочимо тачку B_s симетричну тачки B у односу на праву n. Како је $n \parallel BH$ и $BS \perp n$, добијамо да је $\sphericalangle NBB_s = 90^\circ$, па је HB_s пречник кружнице k, те је и $\sphericalangle HSB_s = 90^\circ$. Даље, како је у овом случају редослед тачака на кружници $B_s - C - T - S - H - A - B$ имамо да је $\sphericalangle HST > \sphericalangle HSB_s = 90^\circ$, тј. $\sphericalangle HST$ је туп.

Уколико су тачке H, S и T колинеарне, онда оне не леже ни на једној кружници, па тада задатак нема решења. Уколико угао $\sphericalangle HST$ није туп задатак нема решења. У свим осталим случајевима задатак има јединствено решење, јер је могуће остварити конструкцију из претходног дела задатка.

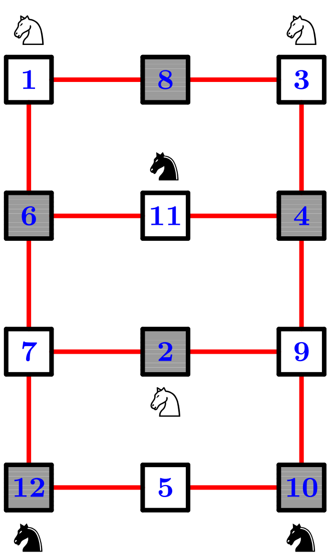
5. Тангента, број 59, страна 8, игра 3.

Минималан број потеза износи 18.

Означимо поља на табли као на следећој слици:

10	**11**	**12**
7	**8**	**9**
4	**5**	**6**
1	**2**	**3**

Направимо граф у коме чворовима одговарају поља полазне шаховске табле 4×3 и два поља су суседна само уколико скакач може са једног да скочи на друго:



Бели скакачи са поља 1 и 3 не могу оба да пређу на најближе поље где је на почетку био неки црни скакач (јер је то исто поље – 11), стога бар један од њих мора да оде на поље које је на растојању 3 (до њега долази у 3 скока). Стога бели скакачи морају да направе бар $2+2+3=7$ скокова. Због симетрије исто важи и за црне скакаче.

Уочимо белог и црног скакача који праве 3 скока (без умањења општости можемо узети да је бели са поља 1):

1° црни скакач са поља 12 прави 3 скока. Тада би и бели ишао $1 \to 12$ и црни $12 \to 1$ у по 3 скока, што је немогуће.

2° црни скакач са поља 10 прави 3 скока. Тада би бели скакачи ишли $1 \to 12$, $3 \to 11$ и $2 \to 10$, а црни би ишли $10 \to 3$, $11 \to 1$ и $12 \to 2$. Дискусијом по првом потезу белог, затим по првом потезу црног... у свим случајевима би дошли до ситуације где би неки коњ "блокирао" неког другог и тако га спречио да дође до свог одредишта у најмањем броју скокова. Стога се тражена замена не може извршити са $7+7$ потеза (7 белог и 7 црног).

Како скакач при сваком свом потезу мења боју поља на коме се налази и како су на почетку бели скакачи били на белом, црном и белом пољу, а на крају на црном, белом и црном $\Rightarrow$ бели мора да одигра непаран број потеза. Исто важи и за црног. Стога минималан број потеза и црног и белог играча може бити једнак 9, тј. укупно $9+9=18$ потеза, а да је замена могућа у 18 потеза показује нпр. следећа игра:

потези	$1,2$	$3,4$	$5,6$	$7,8$	$9,10$
бели	$1 \to 6$	$6 \to 7$	$3 \to 4$	$4 \to 11$	$2 \to 9$
црни	$10 \to 9$	$11 \to 6$	$6 \to 1$	$9 \to 4$	$4 \to 3$

потези	$11,12$	$13,14$	$15,16$	$17,18$
бели	$7 \to 6$	$9 \to 10$	$6 \to 7$	$7 \to 12$
црни	$12 \to 7$	$7 \to 2$	$1 \to 6$	$6 \to 1$

Други разред , А категорија

1. Низом трансформација добијамо:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x \Leftrightarrow (1+\sqrt{1+x}=x^2 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow (\sqrt{1+x}=x^2-1 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+x=(x^2-1)^2 \wedge x^2-1 \geq 0 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow (1+x=x^4-2x^2+1 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0=x^4-2x^2-x \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow (0=x(x^3-2x-1) \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow (0=x(x+1)(x^2-x-1) \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x=0 \vee x=-1 \vee x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow (x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

На овај начин смо установили да полазна једначина има тачно једно решење и то је број $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Тангента 62, стр. 3, Пример4.)

2. Уколико су неке две дијагонале међусобно паралелне, онда је тврђење доказано. Претпоставимо, надаље, да то није случај. Како n-тоугао има $\dfrac{n(n-3)}{2}$ дијагонала, једанаестоугао има 44 дијагонале. Ако кроз неку тачку равни конструишемо 44 праве које су паралелне дијагоналама, ове праве деле пун угао од 360° на 88 углова. Како је $\frac{360^\circ}{88}<5^\circ$, мора постојати бар један угао који је мањи од 5°, чиме је доказ завршен.

3. Нека је a произвољан реалан број. Докажимо да постоји реалан број x, $x \neq \frac{1}{k}$, такав да је $\frac{x^2-x}{1-kx}=a$, чиме ће бити доказано тврђење. Дакле, треба доказати да једначина $x^2-x=a(1-kx)$ има бар једно реално решење (број $x=\frac{1}{k}$, није њено решење пошто због $k>1$, важи $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}<0=a(1-k\cdot\frac{1}{k})$). Докажимо да је дискриминанта D, квадратне једначине $x^2+(ak-1)x-a=0$, ненегативна, што сведочи да она има реално решење. Имамо да је $D=(ak-1)^2+4a=k^2a^2+(4-2k)a+1$. Како је $k \neq 0$, то је $f(a)=(ak-1)^2+4a=k^2a^2+(4-2k)a+1$ квадратна функција (по a), са позитивним водећим коефицијентом. Зато она достиже свој минимум који износи $\frac{4\cdot k^2\cdot 1-(4-2k)^2}{4\cdot k^2}=\frac{4(k-1)}{k^2}$. Последњи израз је, због $k>1$, позитиван, а тиме и дискриминанта D, што смо и желели да докажемо.

4. На основу Птоломејеве неједнакости, за ма који четвороугао $ABCD$ важи

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA \geq AC\cdot BD,$$

при чему знак једнакости важи акко је четвороугао $ABCD$ тетиван. Са друге стране, за површину ма ког четвороугла $ABCD$ важи $P_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi$, где је φ угао између дијагонала тог четвороугла. Зато за произвољан четвороугао $ABCD$ важи

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA \geq AC\cdot BD=\frac{2P_{ABCD}}{\sin\varphi} \geq 2P_{ABCD}. \qquad (\boxtimes)$$

У другој неједнакости, једнакост важи ако и само ако је $AC \perp BD$. Према томе, једнакост у задатку се достиже ако и само ако је $ABCD$ тетиван четвороугао са међусобно нормалним дијагоналама.

5. Нека је $(x,y,u,v)\in\mathbb{N}^4$ неко решење задатка. Посматрајмо дате једначине по модулу 7. Како степени броја 2 дају остатке $1, 2$ и 4, а кубови природних бројева остатке $0, 1$ и 6 по модулу 7, то је $2^u \equiv 2^v \equiv 1 \pmod 7$, па је u и v дељиво са 3. Дакле, 2^u и 2^v су кубови природних бројева, па се дати систем може записати и као (за неке $z,t\in\mathbb{N}$)

$$x^3+7y=z^3 \qquad y^3+7x=t^3.$$

Без умањења општости можемо претпоставити да је $x \leqslant y$. Тада је

$$y^2<z^3=y^2+7x \leqslant y^3+7y<(y+2)^3,$$

па је $z=y+1$ и самим тим $3y^2+3y+1=7x$. Како је $7x \leqslant 7y$, то је $3y^2-4y+1 \leqslant 0$, односно $y=1$ и $x=1$. Провером за $x=y=1$ добијамо да је $u=v=3$, те је једино решење задатка уређена четворка $(1,1,3,3)$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД – А категорија

1. Како је $Q(x) = x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$, то су нуле полинома $Q(x)$ бројеви $-1, i$ и $-i$. Одредимо све природне бројеве n такве да су наведени бројеви и нуле полинома $P(x)$, што је потребан и довољан услов да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)$. Пошто је $P(-1) = 2+2\cdot(-1)^n$, то је број -1 нула полинома $P(x)$ акко је n непаран број. За непарне бројеве n важи

$$P(i) = i^{3n}+i^{2n}+i^n+1 = i^n(i^{2n}+1)+i^{2n}+1 = (i^{2n}+1)(i^n+1) = ((-1)^n+1)(i^n+1) = 0.$$

Пошто је тада и $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$, то су решења задатка сви непарни бројеви n.

2. Означимо са $d_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 3 \end{vmatrix}$ детерминанту реда n код које прво иду 1, па онда 2. Сада ћемо и D_n и d_n развити прво по I колони, а затим другу детерминанту реда $n-1$ и по I врсти. Тако долазимо до система рекурентних једначина:

$$\begin{aligned} D_n &= 3\cdot d_{n-1} - 4\cdot D_{n-2} \\ d_n &= 3\cdot D_{n-1} - d_{n-2}. \end{aligned}$$

Из прве од ових једначина добијамо $d_{n-1} = \frac{1}{3}D_n + \frac{4}{3}D_{n-2}$ и кад то убацимо у другу (са помереним индексима за 1 – прво уместо n стављамо $n+1$, а после n мењамо са $n-1$) добијамо $\frac{1}{3}D_{n+1} + \frac{4}{3}D_{n-1} = 3D_{n-1} - \frac{1}{3}D_{n-1} - \frac{4}{3}D_{n-3}$, што након сређивања даје линеарну рекурентну једначину

$$D_{n+1} - 4D_{n-1} + 4D_{n-3} = 0.$$

Приметимо да у овој једначини члан низа зависи само од оног са индексом за 2 мањим и оног са индексом за 4 мањим. Стога ћемо посебно рачунати D_n у зависности од тога да ли је n парно или непарно.

1° $\underline{n = 2k}$: Означимо са $w_k = D_{2k}$ и добијамо рекурентну једначину $w_k - 4w_{k-1} + 4w_{k-2} = 0$, за коју карактеристична једначина $t^2-4t+4 = 0$ има двоструко решење $t_1 = t_2 = 2$, па је $w_k = (C_1 + C_2k)\cdot 2^k$. Из почетних услова $w_0 = D_0 = 1 = C_1$ и $w_1 = D_2 = 5 = 2C_1 + 2C_2$ налазимо константе, па је $w_k = (1+\frac{3}{2}k)\cdot 2^k$.

2° $\underline{n = 2k+1}$: Означимо са $u_k = D_{2k+1}$ и имамо исту рекурентну једначину
$u_k - 4u_{k-1} + 4u_{k-2} = 0$, са истим решењем $u_k = (C_1 + C_2k)\cdot 2^k$. Из почетних услова $u_0 = D_1 = 3 = C_1$ и $u_1 = D_3 = 12 = 2C_1 + 2C_2$ налазимо константе, па је $u_k = (3+3k)\cdot 2^k$.

Обједињавањем решења из оба случаја долазимо до

$$D_n = \begin{cases} (1+\frac{3}{2}k)\cdot 2^k, & n = 2k \\ (3+3k)\cdot 2^k, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

3. Остаци кубова при дељењу са 9 могу бити 0, 1 и 8. Збир три куба може давати остатке 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 и 8, што значи да је немогуће на овај начин представити бројеве облика $9k+4$, где је $k \in \mathbb{Z}$, а како је $2011 = 9 \cdot 223 + 4$, то једначина $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$ нема решења у скупу целих бројева. Квадратни остаци по модулу 12 су 0, 1, 4 и 9:

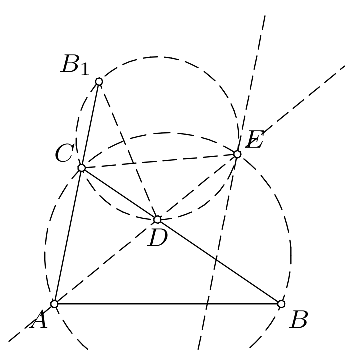
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n^2	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Како је $2011 \equiv 7 \pmod{12}$ и једини начин (до на пермутацију) да добијемо остатак 7 сабирањем бројева из скупа $\{0,1,4,9\}$ је $9+9+1$, то морамо одабрати два броја који дају остатак 3 при дељењу са 6. Како је $45^2 > 2011$ добијамо да 2 од 3 броја x, y, z припадају скупу $\{9, 15, 21, 27, 33, 39\}$. Проверавањем свих случајева добијамо да у 4 имамо решења:

$$9^2+9^2+43^2 = 2011,\ 9^2+33^2+29^2 = 2011,\ 21^2+27^2+29^2 = 2011,\ 21^2+39^2+7^2 = 2011.$$

Самим тим, једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2011$ има решења у скупу целих бројева, па има више решења у скупу целих бројева од једначине $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$.

4. Нека је N пресечна тачка симетрале $\sphericalangle BAC$ и круга описаног око троугла ABC, различита од A. Тада је $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ABC = \beta$, као периферијски углови над тетивом AC. Троуглови ADB и ADB_1 су подударни, па је $\sphericalangle AB_1D = \sphericalangle ADB = \beta$. Одатле је $\sphericalangle DNC = \sphericalangle DB_1C = \beta$, па тачка N припада и описаном кругу око троугла B_1CD, тј. $N \equiv E$. Означимо са t тангенту круга описаног око троугла B_1CD у тачки E. Тада је $\sphericalangle tEA = \sphericalangle DCE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = \dfrac{\alpha}{2}$, као периферијски углови над тетивом BE. Одатле заиста следи $t \parallel AC$.



ОК 12 3А 4

5. Одговор: за свако парно $n \geqslant 4$. Нека свако од m пријатељстава бројимо 2 пута код оба пријатеља - на тај начин смо код сваког човека пребројали све његове пријатеље. Ако означимо са p_i број пријатеља i-тог човека, из услова задатка добијамо да је $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 3 + 3 + \ldots + 3 = n \cdot 3 = 2 \cdot m$, одакле следи да n не може бити непаран број. За $n = 2$ ниједан од 2 човека не може имати 3 познаника. Остаје да покажемо да за свако парно $n \geqslant 4$ можемо конструисати ситуацију са пријатељствима која се тражи у задатку. Граф чији су чворови темена $n-$ тоугла, а гране све странице и најдуже дијагонале $n-$тоугла очигледно задовољава тражене услове.

Четврти разред - А категорија

1. Заменом $x=0, y=1$ следи $|f(0)| \leqslant 2011 \leqslant |f(0)|$, тј. $|f(0)| = 2011$. Заменом $y=-x \neq 0$ следи $|f(x)| \leqslant 2011 \leqslant \left|\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right| \leqslant \dfrac{|f(x)|+|f(-x)|}{2}$, па је $|f(x)| = 2011$ и $f(x) = f(-x)$ (тј. f је парна функција).
Ако су $x \neq y$ бројеви различити од 0 и $f(x) = 2011$, $f(y) = -2011$, због парности се може претпоставити да је $y < 0 < x$, па из услова задатка следи $|x-y| \leqslant |x+y|$, што противречи избору x и y. Следи да је f константна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Провером се добија да функције $f_1(x) = 2011$ за $x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = -2011$ за $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3(x) = \begin{cases} 2011, & \text{за } x \neq 0 \\ -2011, & \text{за } x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_4(x) = \begin{cases} -2011, & \text{за } x \neq 0 \\ 2011, & \text{за } x = 0 \end{cases}$$

задовољавају услове задатка, па су ово једина решења (Тангента 64, страна 14, Наградни задаци, задатак М957).

2. Функција $g(x) = f^2(x) - 2\sin x$ је растућа на $(0,\infty)$ и ограничена, па постоји $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. Ако би постојао и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, онда би постојао и $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^2(x) - g(x)}{2}$. Како ова гранична вредност не постоји, следи тврђење задатка.

3. Из услова задатка следи $x^{2012} + 1 = (4y^{2011} + 2011)(y+1)$. Како је $4y^{2011} + 2011 \equiv 3 \pmod 4$, постоји прост p такав да је $p \equiv 3 \pmod 4$ и $p \mid \left(x^{1006}\right)^2 + 1$, што је немогуће, јер је $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, па једначина $x^2 \equiv -1 \pmod p$ нема решења.

4. Нека је S_a центар k_a, а S и O, редом, центри уписаног и описаног круга. Тачка S_a лежи на дужи OA и важи $AS_a = r_a$, $OS_a = R - r_a$, па по Стјуартовој теореми важи $SS_a^2 = \dfrac{r_a}{R} \cdot SO^2 + \dfrac{R-r_a}{R} \cdot SA^2 - r_a(R-r_a)$. Како је $SS_a = r + r_a$ и како је, према Ојлеровој теореми, $SO^2 = R^2 - 2Rr$, следи $R(r+r_a)^2 = r_a(R^2 - 2Rr) + (R-r_a)SA^2 - Rr_a(R-r_a)$, па је

$$r_a = \frac{R(SA^2 - r^2)}{SA^2 + 4Rr} \quad \text{и} \quad \frac{R - r_a}{r + 4r_a} = \frac{Rr}{SA^2}\,.$$

Аналогно је $\dfrac{R-r_b}{r+4r_b} = \dfrac{Rr}{SB^2}$ и $\dfrac{R-r_c}{r+4r_c} = \dfrac{Rr}{SC^2}$, па се тражена неједнакост своди на $\dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{r^2}{SA^2} + \dfrac{r^2}{SB^2} + \dfrac{r^2}{SC^2} = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\gamma}{2}$, што је еквивалентно са $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$. Последња неједнакост је тачна, јер је $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma \leqslant 2\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma = 1 + 2\sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}$. Једнакост се достиже ако и само ако је $\alpha = \beta$ и $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, односно ако и само ако је троугао једнакостраничан.

5. Нека је тражена табла $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ и нека је $\Sigma[B]$ збир елемената табле B.
Нека је $n \geqslant 4$. По условима задатка је $\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 2, 2\leqslant j\leqslant 3}] < 0$, $\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2}] < 0$ и $\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}] > 0$ па је

$$a_{1,1} + a_{3,3} - a_{2,2} = \Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}] - \Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 2, 2\leqslant j\leqslant 3}] - \Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2}] > 0.$$

Аналогно је $a_{2,2} + a_{4,4} - a_{3,3} > 0$, па је $a_{1,1} + a_{4,4} > 0$.
Табла 4×4 се може поделити на 4 дисјунктне табле 2×2, па како је збир елемената у свакој од њих негативан, негативан је збир и у тој табли. По условима задатка је $\Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3, 2\leqslant j\leqslant 4}] > 0$, $\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 4, 1\leqslant j\leqslant 3}] > 0$ и $\Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i,j\leqslant 3}] < 0$ па је

$$a_{1,1} + a_{4,4} = \Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}] - \Sigma[(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3, 2\leqslant j\leqslant 4}] - \Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i\leqslant 4, 1\leqslant j\leqslant 3}] + \Sigma[(a_{i,j})_{2\leqslant i,j\leqslant 3}] < 0.$$

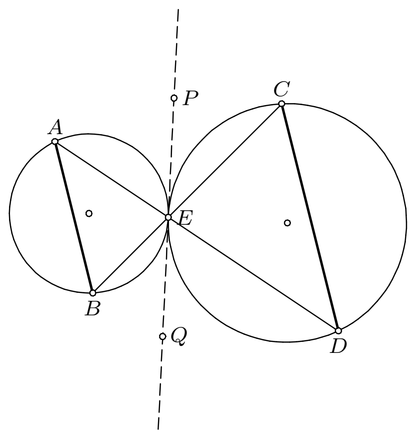
Дакле, ако је $n \geqslant 4$ следи $0 > a_{1,1} + a_{4,4} > 0$, што је немогуће, па мора бити $n = 3$. Са друге стране, табла $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant 3}$ за коју је

$$a_{m,k} = \begin{cases} 2, & \text{ако је } k \in \{1,3\} \\ -3, & \text{ако је } k = 2 \end{cases}$$

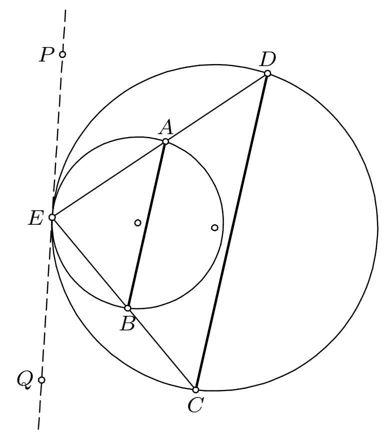
задовољава услове задатка, па су $(m,3)$ за $m \geqslant 3$ сва решења задатка.

Први разред - Б категорија

1. Нека су P и Q тачке које припадају тангенти на описани круг $\triangle ABE$ у тачки E, такве да су A и P са исте стране праве BC, а B и Q са исте стране праве AD. Онда је $\sphericalangle PEA = \sphericalangle EBA$ (тангентни и тетивни угао), а како је $AB \parallel CD$ важи и $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ECD$, па је $\sphericalangle PEA = \sphericalangle ECD$.



ОК-РЕП 12 1Б 1-1



ОК-РЕП 12 1Б 1-2

1° Ако се E налази са исте стране правих AB и CD, следи $\sphericalangle PED = \sphericalangle ECD$, тј. PQ тангира описани круг $\triangle ECD$.

2° Ако се E налази између правих AB и CD, онда је $\sphericalangle PEA = \sphericalangle QED$, па је $\sphericalangle ECD = \sphericalangle QED$, тј. PQ тангира описани круг $\triangle ECD$.

2. Заменом $x = 2$, $x = -1$ и $x = \frac{1}{2}$ добија се $f(2) + f(-1) = 2$, $f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ и $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{1}{2}$, па следи

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) - f(-1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{7}{4}$$

(Тангента 61, страна 33, Писмени задаци, задатак 4).

3. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, следи $r \in \{2, 3, 5, 67\}$.

1° Ако је $r = 2$, следи $3p + q^2 = 3 \cdot 5 \cdot 67$, па је $p = 2$ или $q = 2$. Ако је $p = 2$, следи $q^2 = 999$, што је немогуће. Ако је $q = 2$ следи $3p = 1001$, што је немогуће.

2° Ако је $r = 3$, следи $3p + q^2 = 2 \cdot 5 \cdot 67$, па је $q < 26$, односно $q \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

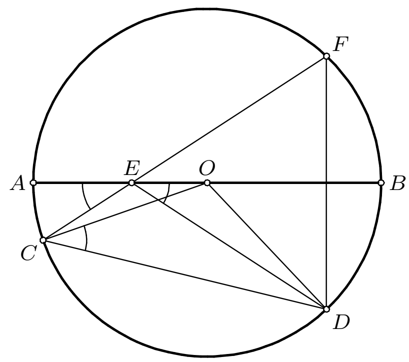
- (а) Ако је $q = 2$, следи $3p = 666$, тј. $p = 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$.
- (б) Ако је $q = 3$, следи $3p = 661$, што је немогуће.
- (в) Ако је $q = 5$, следи $3p = 645$, тј. $p = 215 = 5 \cdot 43$.
- (г) Ако је $q = 7$, следи $3p = 621$, тј. $p = 207 = 3^2 \cdot 23$.
- (д) Ако је $q = 11$, следи $3p = 549$, тј. $p = 183 = 3 \cdot 61$.
- (ђ) Ако је $q = 13$, следи $3p = 501$, тј. $p = 167$, што је прост број.
- (е) Ако је $q = 17$, следи $3p = 381$, тј. $p = 127$, што је прост број.
- (ж) Ако је $q = 19$, следи $3p = 309$, тј. $p = 103$, што је прост број.
- (з) Ако је $q = 23$, следи $3p = 141$, тј. $p = 47$, што је прост број.

3° Ако је $r = 5$, следи $3p + q^2 = 2 \cdot 3 \cdot 67$, па је $q = 3$, одакле је $p = 131$, што је прост број.

4° Ако је $r = 67$, следи $3p + q^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, па је $q = 3$, одакле је $p = 7$, што је прост број.

Дакле, укупно има шест решења (Тангента 64, страна 35, Писмени задаци, задатак 13).

4. Нека CE сече кружницу над AB по други пут у F. По условима задатка је $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BED$, па су D и F симетричне у односу на AB. Како је $\sphericalangle DOC = 2 \cdot \sphericalangle DFC = 2 \cdot \sphericalangle DFE$ (централни и периферијски угао) и како су $\triangle EDF$ и $\triangle DOC$ једнакокраки, следи $2 \cdot \sphericalangle BED = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle DFE = 180^\circ - \sphericalangle DOC = 2 \cdot \sphericalangle OCD$. Следи $\sphericalangle OED = \sphericalangle BED = \sphericalangle OCD$, па је четвороугао $CDOE$ тетиван.



ОК-РЕП 12 1Б 4

5. Збир поена свих такмичара једнак је укупном броју одиграних укакмица, односно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. По условима задатка овај број је непаран и важи $4 \leqslant n \leqslant 9$, па је $n \in \{6, 7\}$.

1° Ако је $n = 6$, играч који је на четвртом месту је освојио 1, 3 или 5 поена. Није могао освојити 5 поена, јер би тада био први. Није могао освојити ни 1 поен, јер би тада постојала 4 играча који су га победили, а како они имају паран број поена, он би био пети или шести. Ако је освојио 3 поена, онда су 3 боље рангирана играча освојили по 4 поена, па су преостала 2 играча освојила $\frac{6 \cdot 5}{2} - 3 - 3 \cdot 4 = 0$ поена, што је немогуће, јер су међусобно играли. Следи да није могућа ни ова ситуација, па не може бити $n = 6$.

2° Случај $n = 7$ је могућ, ако се турнир одвија као у једној од табела (могуће је показати и да су ово једина 2 могућа турнира за $n = 7$ који задовољавају услов задатка).

	1	2	3	4	5	6	7	Σ
1	×	1	1	1	1	1	1	6
2	0	×	1	1	1	0	1	4
3	0	0	×	1	1	1	1	4
4	0	0	0	×	1	1	1	3
5	0	0	0	0	×	1	1	2
6	0	1	0	0	0	×	1	2
7	0	0	0	0	0	0	×	0

	1	2	3	4	5	6	7	Σ
1	×	1	0	1	1	0	1	4
2	0	×	1	1	1	1	0	4
3	1	0	×	1	1	0	1	4
4	0	0	0	×	1	1	1	3
5	0	0	0	0	×	1	1	2
6	1	0	1	0	0	×	0	2
7	0	1	0	0	0	1	×	2

Други разред - Б категорија

1. Услов дефинисаности датог израза је $x^2+2x-32 \geqslant 0$. Уведимо зато смену $t^2 = x^2+2x-32$. Дата једначина се сада своди на $\sqrt{t^2-6\cdot|t|+33}=5$, односно, након квадрирања, на $t^2-6\cdot|t|+8=0$. Последња једначина је квадратна по $|t|$ и њена решења су $|t|=2$ и $|t|=4$. За $|t|=2$ добијамо једначину $4=x^2+2x-32$, па је $x=-1\pm\sqrt{37}$; за $|t|=4$ добијамо једначину $16=x^2+2x-32$, па је $x=6$ или $x=-8$.

Дакле, сва решења дате једначине су $x\in\{-1-\sqrt{37},-1+\sqrt{37},-8,6\}$.

2. Доказаћемо да Милош увек може да победи.

Ако Александар упише a или b Милош ће уписати $c=0$ и онда једначина не може да има два решења истог знака (јер је једно 0).

Ако Александар упише $c=m\neq 0$ онда Милош уписује $a=-m$ и тада је $D=b^2-4ac>-4ac>0$, па квадратна једначина има 2 различита решења, а због Виетових правила имамо да је $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$, те су она супротног знака.

3. Нека је $z=a+bi$, за $a,b\in\mathbb{R}$. Тада за $(a,b)\neq(1,0)$ важи

$$\frac{z-2}{z-1}=\frac{(a-2)+bi}{(a-1)+bi}=\frac{(a-2)+bi}{(a-1)+bi}\cdot\frac{(a-1)-bi}{(a-1)-bi}=\frac{a^2-3a+2+b^2}{(a-1)^2+b^2}+\frac{bi}{(a-1)^2+b^2}.$$

Да би први услов био испуњен мора да важи $a^2-3a+2+b^2=0$, тј. $(a-\frac{3}{2})^2+b^2=\frac{1}{4}$, односно $\left|z-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Дакле, све тачке које задовољавају први услов леже на кружници комплексне равни са центром у $\frac{3}{2}$ и полупречником $\frac{1}{2}$. Да би други услов био испуњен потребно је да важи $b=0$, па се све тачке које га задовољају налазе на реалној оси.

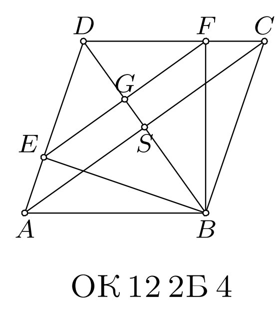
4. Означимо са G пресек дужи BD и EF, а са S пресек дијагонала датог ромба. Како је $\sphericalangle EDB=\sphericalangle FDB$, $\sphericalangle DEB=\sphericalangle DFB=90^\circ$, то су троуглови DEB и DFB подударни, па је $DE=DF$. Како је и $EB=FB$, то је четвороугао $DEBF$ делтоид, па је $DB\perp EF$. Како је и $AC\perp DB$, то је $EF\parallel AC$. Дуж DG је висина једнакокраког троугла EDF, па је уједно и тежишна дуж, а самим тим и $EG=GF=b/2$. Даље, како је $\sphericalangle DGE=\sphericalangle EGB=90^\circ$ и $\sphericalangle BEG=90^\circ-\sphericalangle DEG=\sphericalangle EDG$, то су троуглови GDE и GEBслични. Из Питагорине теореме је $GB^2=EB^2-EG^2=a^2-b^2/4$, па је из претходне сличности

$$\frac{b/2}{DE}=\frac{EG}{DE}=\frac{GB}{EB}=\frac{\sqrt{a^2-b^2/4}}{a},$$

одакле добијамо $DE=\dfrac{ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. Применом Питагорине теореме добијамо $DG^2=DE^2-EG^2=\dfrac{b^4}{4(4a^2-b^2)}$ и $DB^2=DE^2+EB^2=\dfrac{4a^4}{4a^2-b^2}$.

Даље, како је $EG\parallel AS$, из Талесове теореме имамо $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{DG}{DS}=2\cdot\dfrac{DG}{BD}$, па је

$$AD=\frac{DE\cdot BD}{2\cdot DG}=\frac{2a^3}{b\cdot\sqrt{4a^2-b^2}}.$$



ОК 12 2Б 4

5. Означимо са $\overline{abcde}$ тражени број. Тада треба да важи

$$2 \mid \overline{ab}, \qquad 3 \mid \overline{abc}, \qquad 4 \mid \overline{abcd}, \qquad 5 \mid \overline{abcde}.$$

Четврти услов, $5 \mid \overline{abcde}$, је задовољен само ако је $e \in \{0, 5\}$, тј. цифру e можемо одредити на 2 различита начина.

Први услов, $2 \mid \overline{ab}$, је задовољен само ако је $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, тј. цифру b можемо одредити на 5 различитих начина.

Трећи услов, $4 \mid \overline{abcd}$, је задовољен само ако је

$$\overline{cd} \in \{00, 04, 08; 12, 16; 20, 24, 28; 32, 36; \ldots 92, 96\}.$$

Приметимо да ако је цифра c једна од 0, 2, 4, 6 или 8 онда цифру d можемо одабрати на 3 начина ($d \in \{0, 4, 8\}$), а ако је цифра c једна од 1, 3, 5, 7 или 9 онда цифру d можемо одабрати на 2 начина ($d \in \{2, 6\}$). Стога цифре c и d можемо одредити на $5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$ различитих начина.

Остаје да одредимо још прву цифру a. Она не може бити 0 (јер је број петоцифрен). Други услов $3 \mid \overline{abc}$ је еквивалентан са условом $3 \mid a + b + c$. Уколико је $b + c$ дељиво са 3, цифру a можемо изабрати на 3 начина ($a \in \{3, 6, 9\}$); уколико $b + c$ даје остатак 1 при дељењу са 3, цифру a можемо изабрати на 3 начина ($a \in \{2, 5, 8\}$); уколико $b + c$ даје остатак 2 при дељењу са 3, цифру a можемо изабрати на 3 начина ($a \in \{1, 4, 7\}$). Стога цифру a (кад смо одредили остале) можемо одредити на 3 различита начина.

На основу претходне анализе следи да бројева који испуњавају услове задатка има укупно $2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 3 = 750$.

Решења за трећи разред – Б категорија

1. $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$\dfrac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$
$\dfrac{2\cos 30^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}\,.$

2. Одузимањем друге релације од прве добија се:

$$\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{d}.$$

Применом правила векторског производа добија се:

$$\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{c} - \vec{b}) \times \vec{d},$$

односно $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c})$, тј. $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) - \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$, тј. $(\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$.

Одавде следи закључак да су вектори $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ колинеарни.

3. Тангента, број 59, страна 41, II 5.

Ако уведемо смене $a = 5^y$ и $b = \log_3 x$, прва једначина је $2 \cdot \frac{5}{a} = -2b$, односно након скраћивања дати систем постаје

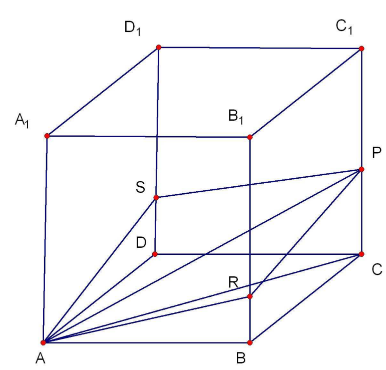
$$ab = -5, \qquad a + b = 4.$$

Када из друге изразимо b преко a, тј. $b = 4 - a$, и убацимо у прву добијамо квадратну једначину $a^2 - 4a - 5 = 0$, која има 2 решења: $a_1 = -1$ (које отпада јер је $a = 5^y > 0$) и $a_2 = 5$ (тада је $b = -1$).

Даље имамо $5^y = 5 \;\Rightarrow\; y = 1$ и $\log_3 x = -1 \;\Rightarrow\; x = 3^{-1} = -\frac{1}{3}$.

Једино решење полазног система је $(x, y) = (\frac{1}{3}, 1)$.

4. Страница базе призме је
$AB = BC = CD = DA = a$.
Странцица ромба је
$AS = SP = AR = RP = x$.
Дијагонала ромба $AP = d$.
Угао $\sphericalangle RAS = \alpha$.
Угао $\sphericalangle PAC = \beta$.

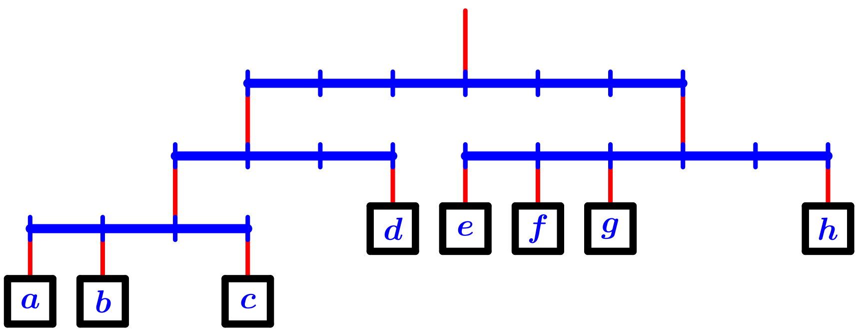


Применимо косинусну теорему на троугао $\triangle ASR$:
$AS^2 + AR^2 - 2 \cdot AS \cdot AR \cdot \cos\alpha = SR^2$
$x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha = (a\sqrt{2})^2$
$2x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha = 2a^2$ (*)

Применимо косинусну теорему на троугао $\triangle ARP$
$AR^2 + RP^2 - 2 \cdot AR \cdot RP \cdot \cos(\pi - \alpha) = AP^2$
$x^2 + x^2 + 2x^2 \cdot \cos\alpha = d^2$
$2x^2 + 2x^2 \cdot \cos\alpha = d^2$ (**)
Из једнакости (*) и (**) добијамо да је $\dfrac{2x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha}{2x^2 + 2x^2 \cdot \cos\alpha} = \dfrac{2a^2}{d^2}$, односно $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2a^2}{d^2}$, тј. $\dfrac{a\sqrt{2}}{d} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \cos\beta$, одакле је $\beta = \arccos\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5. Тангента, број 58 и 59, корице.

Означимо тежине тегова, редом, са a, b, c, d, e, f, g, h:



Тада због хоризонталног положаја свих летви имамо следеће једнакости:

$$a \cdot 2 + b \cdot 1 = c \cdot 1, \qquad (a+b+c) \cdot 1 = d \cdot 2, \qquad e \cdot 3 + f \cdot 2 + g \cdot 1 = h \cdot 2,$$

$$(a+b+c+d) \cdot 3 = (e+f+g+h) \cdot 3.$$

На основу прве две од ових једнакости имамо $2a + b = c$ и $2d = a + b + c = 3a + 2b < 4a + 2b$, одакле је $c > d > a$ и $c > d > b$. Из треће имамо да је $h > e$ и $h > f$. Дакле, највећи број (тј. 8) може бити само c, g или h.

1° Ако је $c = 8$, на основу прве једнакости добијамо 3 случаја: $(a, b) \in \{(3, 2), (2, 4), (1, 6)\}$. На основу друге једнакости број $a + b + c$ је паран, па отпадају подслучајеви $(a, b) = (3, 2)$ и $(a, b) = (1, 6)$. Ако је $a = 2$, $b = 4$ и $c = 8$, добијамо да је $d = 7$, али тада не важи последња једнакост $(a+b+c+d = e+f+g+h)$:

$$2 + 4 + 7 + 8 = 21 \neq 15 = 1 + 3 + 5 + 6.$$

2° Ако је $g = 8$, онда је $h \leqslant 7$, али онда не може да важи трећа једнакост, јер већ за најмање вредности e и f ($e = 1, f = 2$ и $e = 2, f = 1$) имамо:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 15 > h \cdot 2, \qquad 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 16 > h \cdot 2.$$

3° $\boxed{h = 8}$ – мора да наступи овај случај. Сада ћемо да видимо колико је c.

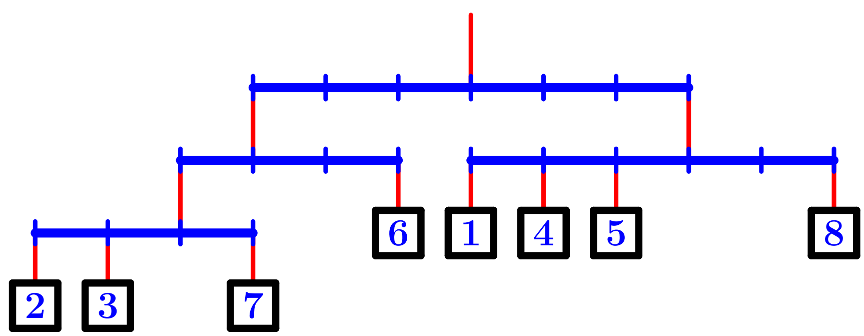
Ако је $c < 7$ онда је $7 \in \{e, f, g\}$. Ако би било $e = 7$ или $f = 7$ онда би било $3e + 2f + g > 16 = 2h$, па не би важила трећа једнакост. Стога је $g = 7$. Када добијене вредности заменимо у трећу једнакост добијамо да је $3e + 2f = 9$, одакле следи да је e непаран. За $e > 3$ важи $3e + 2f > 9$, па не може бити овај случај, стога је $e = 1$, одакле би добили и $f = 3$. Али тада не би важила четврта једнакост:

$$2 + 4 + 5 + 6 = 17 \neq 19 = 1 + 3 + 7 + 8.$$

Стога је $\boxed{c = 7}$. Даље, из прве једнакости имамо $2a + b = 7$, па је број b непаран, те имамо 3 случаја: $(a, b) \in \{(3, 1), (2, 3), (1, 5)\}$. На основу друге једнакости број $a + b + c$ је паран, па отпадају подслучајеви $(a, b) = (3, 1)$ и $(a, b) = (1, 5)$. Стога је $\boxed{a = 2, b = 3, d = 6}$.

Треба још да пронађемо $e, f, g \in \{1, 4, 5\}$ (ти су нам бројеви остали) тако да важи трећа једнакост: $3e + 2f + g = 16$. Ако би било $e = 5$ или $e = 4$ онда би било $3e + 2f + g > 16$. Стога је $\boxed{e = 1}$. Коначно треба да важи $2f + g = 13$, уз $f, g \in \{4, 5\}$. Како је $2 \cdot 5 + 4 = 14 \neq 13$ и $2 \cdot 4 + 5 = 13$, добијамо да је $\boxed{f = 4, g = 5}$.

Лако се провери да овако добијено решење задовољава све 4 једнакости. Како нисмо имали других могућности то је једино решење задатка. Оно је представљено на наредној слици:



Напомена. Критеријум оцењивања:

Ко само нађе решење добија 5 поена. Ко и покаже да су за то решење летве хоризонталне добија 10 поена. Ко поред тога покаже да нема других решења добија свих 20 поена.

Четврти разред , Б категорија

1. Како је $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$, то су нуле полинома $Q(x)$ бројеви $-1, i$ и $-i$. Одредимо све природне бројеве n такве да су наведени бројеви и нуле полинома $P(x)$, што је потребан и довољан услов да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)$. Пошто је $P(-1) = 2 + 2 \cdot (-1)^n$, то је број -1 нула полинома $P(x)$ акко је n непаран број. За непарне бројеве n важи

$$P(i) = i^{3n} + i^{2n} + i^n + 1 = i^n(i^{2n}+1) + i^{2n} + 1 = (i^{2n}+1)(i^n+1) = ((-1)^n+1)(i^n+1) = 0.$$

Пошто је тада и $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$, то су решења задатка сви непарни бројеви n.

2. Претпоставимо да је $x > 1$. Пошто је именилац разломка са десне стране тражене неједнакости позитиван, неједнакост је еквивалентна са

$$(x+1)\ln x - 2x + 2 > 0. \tag{1}$$

Нека је $f(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2$. Имамо да је $f(1) = 0$ и да је f диференцијабилна функција на $(0, +\infty)$. Довољно је доказати да је f растућа, што је еквивалентно са $f'(x) > 0$ за $x \in (1, +\infty)$. Елементарним трансформацијама добијамо $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 2 = \ln x + \frac{1}{x} - 1$. Довољно је доказати следећу неједнакост за $x > 1$:

$$x \ln x + 1 - x > 0. \tag{2}$$

Посматрајмо функцију $g(x) = x\ln x + 1 - x$. Имамо да је $g(1) = 0$ и $g'(x) = \ln x$. Како је $g'(x) > 0$ за $x > 1$ закључујемо да је g растућа функција и $g(x) > 0$ за $x > 1$. Ово имплицира неједнакост (2), што значи да је f растућа. Одатле следи (1) а самим тим и тврђење задатка. (Тангента 66, стр. 17, Наградни задаци, М999)

3. Означимо са H ортоцентар троугла ABC. Тада је $DE \| AH$ и на основу Талесове теореме добијамо $BD : DA = BE : EH$. Пошто је $\triangle BHC_1 \sim \triangle BAB_1$ а D и E тачке које деле њихове странице BH и BA у једнаким размерама закључујемо да је $\angle C_1EB = \angle BDB_1 = 90°$. Из овога следи да је $C_1E \| AC$. (Тангента 63, стр. 11, Наградни задаци, М926)

4. Очигледно ни једна од цифара не сме бити једнака нули. Одаберимо четири различите цифре од којих ни једна није једнака нули. Од тих цифара могуће је саставити тачно један четвороцифрени број који има наведену особину. Зато је број тражених четвороцифрених бројева једнак броју одабира четири различите ненула цифре, односно једнак је $\binom{9}{4} = 126$.

5. Нека је N скуп непарних природних бројева мањих од 2^n, а $S = \{2, 4, \ldots, 2^n\}$ скуп свих степена двојке. Доказаћемо да скуп $S \cup N$ задовољава тражене услове. Приметимо да је $|S \cup N| = n + 2^{n-1}$. Да бисмо доказали да $x, y \in S \cup N$ имплицира $(x+y) \nmid xy$, размотримо следећа три случаја:

   1° Ако су $x, y \in N$, тада је $x + y$ паран па не може бити $(x+y) \mid xy$.

   2° Нека је $x \in N$ а $y \in S$ (или обратно). Претпоставимо да је $y = 2^k$ за неко $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пошто је $x+y$ непаран, из релације $(x+2^k) \mid 2^k x$ би следило да је $(x+2^k) \mid x$ што је немогуће због $x + 2^k > x$.

   3° Ако x и y различити бројеви из скупа S, онда постоје $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такви да је $x = 2^k$ и $y = 2^l$. Ни у овом случају не може да важи $(x+y) \mid xy$ зато што је $xy = 2^{k+l}$ а $x + y = 2^{\min\{k,l\}} \cdot (2^{|k-l|} + 1)$ а $2^{|k-l|} + 1$ је непаран природан број већи од 1. (Тангента 64, стр. 15, Наградни задаци, М959)