ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

Први разред – А категорија

1. На краковима AC и BC једнакокраког троугла ABC дате су тачке M и N, редом, тако да је $CM + CN = AC$. Доказати да средиште дужи MN припада средњој линији тог троугла која одговара страници AB.

2. **а)** Које остатке даје n^2 при дељењу са 5.
б) Наћи све просте бројеве p такве да су и бројеви p^2+4 и p^2+6 прости.

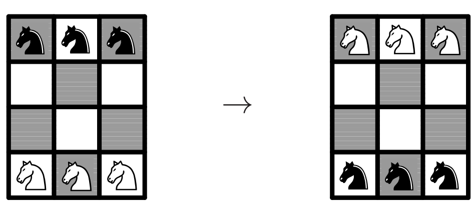
3. Одредити све целе бројеве x тако да вредност израза

$$A = \frac{-3x^3 - x^2 + 12x + 4}{3x^3 + x^2 - 15x - 5}$$

буде цео број.

4. Дате су три различите тачке у равни H, S и T. Конструисати троугао ABC тако да тачке H, S и T, редом, буду пресеци описане кружнице k око троугла ABC са продужецима висине, симетрале угла и тежишне линије из истог темена B. Дискутовати егзистенцију и број решења у зависности од положаја датих тачака!

5. На шаховској табли 4×3 постављена су 3 бела скакача и 3 црна скакача као на наредној слици лево.



Заменити места белим и црним скакачима уз најмањи број потеза (тј. довести их до позиције на претходној слици десно). Скакачи се крећу као у шаху.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.02.2012.

Други разред, А категорија

1. Наћи све реалне бројеве x за које важи:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x.$$

2. Доказати да у сваком конвексном једанаестоуглу постоје две дијагонале које су паралелне или је угао који образују праве којима припадају те дијагонале мањи од 5°.

3. Доказати да за сваки реалан број $k>1$ важи

$$\left\{\frac{x^2-x}{1-kx} \;\middle|\; x\neq\frac{1}{k},\ x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}.$$

4. Доказати да површина конвексног четвороугла $ABCD$ није већа од $\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot DA)$. У каквим четвороугловима важи једнакост?

5. Наћи све природне бројеве x, y, u и v такве да је

$$x^3+7y=2^u \quad \text{и} \quad y^3+7x=2^v.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.02.2012.

Трећи разред, А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је полином $P(x) = x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$ дељив полиномом $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Нека је n природан број. Наћи вредност детерминанте реда n

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Која од једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2011$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$ има више решења у скупу целих бројева?

4. На продужетку странице AC преко темена C троугла ABC $(AB > AC)$ дата је тачка B_1 тако да важи $AB = AB_1$. Симетрала $\sphericalangle BAC$ сече праву BC у тачки D. Кружница описана око троугла B_1CD сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E, $E \neq C$. Доказати да је тангента кружнице описане око троугла B_1CD у тачки E паралелна страници AC.

5. За које $n \in \mathbb{N}$ је могуће формирати релацију пријатељства (релација пријатељства је симетрична) на скупу од n људи, тако да сваки човек има тачно 3 познаника?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају услов

$$|f(x)| \leqslant 2011 \leqslant \left|\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y}\right|$$

за све различите $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Нека је $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ограничена и диференцијабилна и нека за свако $x \in (0, \infty)$ важи $f(x) \cdot f'(x) \geqslant \cos x$. Доказати да $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не постоји.

3. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^{2012} - 2010 = 4y^{2012} + 4y^{2011} + 2011y.$$

4. Нека су R и r полупречници описане и уписане кружнице троугла ABC, редом. Кружница k_a изнутра додирује описану кружницу у тачки A, а споља додирује уписану кружницу троугла ABC. Аналогно су дефинисане k_b и k_c. Нека су r_a, r_b, r_c полупречници кружница k_a, k_b, k_c, редом. Доказати да важи

$$\frac{R - r_a}{r + 4r_a} + \frac{R - r_b}{r + 4r_b} + \frac{R - r_c}{r + 4r_c} \geqslant \frac{3R}{4r}\,.$$

Одредити када се достиже једнакост у претходној неједнакости.

5. Одредити све парове (m, n) природних бројева, тако да је $3 \leqslant n \leqslant m$ и постоји табла димензија $m \times n$ таква да важи:

1° у свако поље табле уписан је цео број;

2° збир бројева у било ком квадрату 2×2 ове табле је негативан;

3° збир бројева у било ком квадрату 3×3 ове табле је позитиван.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

Први разред – Б категорија

1. Нека су AB и CD паралелне и нека је E пресечна тачка правих AD и BC. Доказати да се описане кружнице троуглова ABE и CDE додирују.

2. Ако за све $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ важи $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$, одредити $f(2)$.

3. Колико решења има једначина

$$(3p + q^2)r = 2010$$

у скупу простих бројева?

4. Нека је O средиште дужи AB, а E произвољна тачка дужи AB. Нека C и D припадају кружници над пречником AB, тако да су обе са исте стране праве AB и важи $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$. Доказати да је четвороугао $CEOD$ тетиван.

5. На турниру је учествовало $n < 10$ играча. Сваки играч је играо са сваким тачно једном. За победу играч добија 1 поен, а за пораз 0 поена. Свака утакмица се завршила победом једног од играча.
Након одиграног турнира испоставило се да је тачно један играч имао непаран број поена и да је био пласиран на четврто место. Колико је играча учествовало на турниру?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.02.2012.

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2 - 6 \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 32} + 2x + 1} = 5.$$

2. Доказати да сви комплексни бројеви z за које важи

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = 0$$

припадају једном кругу комплексне равни, а сви они за које важи

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = 0$$

припадају једној правој комплексне равни.

3. Александар и Милош играју следећу игру: они наизменично уписују коефицијенте a, b, c $(a, b \neq 0)$ квадратне једначине

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Александар игра први и он добија ако квадратна једначина има два решења истог знака, а Милош добија у осталим случајевима. Ко од њих двојице има победничку стратегију?
(Број 0 није ни позитиван ни негативан број.)

4. Из темена B тупог угла ромба $ABCD$ конструисане су нормале BE и BF на странице AD и CD, редом. Ако је $BE = BF = a$ и $EF = b$, одредити дужину странице ромба.

5. Колико има петоцифрених бројева таквих да им је двоцифрени почетак дељив са 2, троцифрени почетак дељив са 3, четвороцифрени почетак дељив са 4 и цео број дељив са 5?
(k-тоцифрени почетак броја n је број састављен од k цифара највеће тежине броја n.)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

2. Ако је
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d} \quad \text{и} \quad \vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d},$$
доказати да су вектори $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ колинеарни.

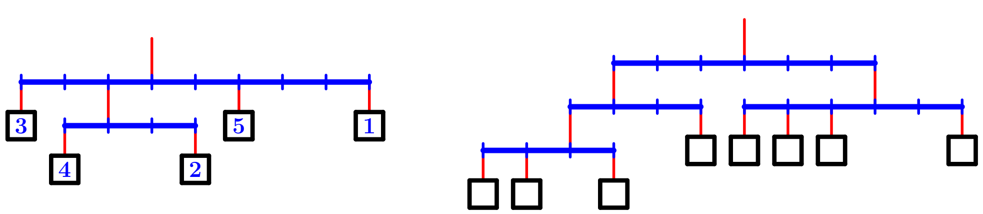
3. Решити систем једначина $2\cdot 5^{1-y}=\log_3(x^{-2}),\quad 5^y+\log_3 x=4.$

4. Пресек правилне четворостране призме и равни која пролази кроз њен врх је ромб са оштрим углом α. Одредити нагибни угао те равни према равни основе призме.

5. Тегови различитих маса струнама су закачени за летвице. Маса летвице и маса струне се занемарују, па се под масом летвице сматра збир маса окачених тегова. Летвице се могу струнама причвршћивати за друге летвице при чему се тачка у којој струна држи закачену летвицу назива ослонац. Закачена летвица се третира као тег. Све тачке летвице у којима су закачени тегови су на целобројним растојањима од ослонца те летвице.

Момент тега је производ његове тежине и растојања од ослонца летвице на којој се налази. Хоризонталан положај летвице означава једнакост момената оптерећења на обе стране у односу на ослонац те летвице, при чему је моменат оптерећења сваке стране летвице једнак збиру момената тегова.

Тежине тегова су различити природни бројеви $1,2,3,\ldots,n$, при чему је n укупан број тегова. Систем тегова са наредне слике лево (ту је $n=5$) има обе хоризонталне летвице, јер за горњу важи једнакост $3\cdot 3+(4+2)\cdot 1=5\cdot 2+1\cdot 5$, а за доњу важи $4\cdot 1=2\cdot 2$. За систем тегова са слике десно одредити масе тегова, тј. на тегове треба уписати по један од бројева $1,2,3,\ldots,8$. Да ли је решење јединствено?



Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.02.2012.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n за које је полином $P(x) = x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$ дељив полиномом $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Доказати да за сваки реалан број $x > 1$ важи неједнакост

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

3. Дат је оштроугли троугао ABC. Означимо са B_1 и C_1 подножја висина из темена B и C на странице AC и AB. Нека је D подножје нормале из B_1 на AB и E пресечна тачка нормале из D на BC и висине BB_1. Доказати да је права EC_1 паралелна страници AC.

4. Колико има четвороцифрених бројева $\overline{abcd}$ за чије цифре важи $a < b < c < d$?

5. Нека је n природан број. Доказати да је могуће изабрати бар $2^{n-1} + n$ бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$ тако да за свака два различита изабрана броја x и y, њихов збир $x + y$ није делилац њиховог производа $x \cdot y$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.