Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Решение. Изучим все числа, которые обладают таким свойством. Обозначим рассматриваемое нами число с данным свойством через N. Если такое число четное, то его остаток от деления на 4 — это 2. Тогда остаток от деления на 6 — это 4, …, остаток от деления на 10 — это 8. Тогда остаток от деления на 3 — это 1, от деления на 5 — это 3, и т. д. Таким образом, если N четное, то $N+2$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2,3,\ldots,10]-2$. Теперь пусть N нечетно. Аналогично получаем, что N дает остаток 3 от деления на 4, остаток 5 от деления на 6 и т. д. Далее N дает остаток 2 от деления на 3 (так как N дает остаток 5 от деления на 6) и остаток 4 от деления на 5. Остаток от деления на 9 может быть равен только 8 (так как N не делится на 3 и нечетные остатки заняты), а для остатка от деления на 7 остаются 2 варианта: 0 и 6. В первом случае $N+1$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2,3,\ldots,10]-1$. Во втором получаем, что $N+1$ кратно $[2,3,4,5,6,8,9,10]=360$ и дает остаток 1 от деления на 7. Наименьшее такое число — это 1800, и значит $N=1799$ будет ответом.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_n=\frac{a_{n-1}}{2n\cdot a_{n-1}+1}$ для $n>1$. Найдите сумму $a_1+a_2+\ldots+a_{2012}$.

Ответ: $\frac{2012}{2013}$. *Решение.* Введем в рассмотрение последовательность $b_n=\frac{1}{a_n}$. Для нее рекуррентное соотношение переписывается в виде $b_n=b_{n-1}+2n$. Значит $b_n=2+4+\ldots+2n=n(n+1)$, откуда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Складывая такие числа по всем n от 1 до 2012 получаем, что сумма равна $\frac{2012}{2013}$.

3. Вещественные числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ таковы, что

$$a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n \geqslant m+(m+1)+\ldots+n$$

при всех натуральных $m \leqslant n$. Докажите, что $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant 1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Решение. Обозначим через b_k разность a_k-k. Тогда $a_k=b_k+k$ и $a_k^2=b_k^2+2kb_k+k^2$. Теперь $\sum_{k=1}^n a_k^2=\sum_{k=1}^n b_k^2+2\sum_{k=1}^n kb_k+\sum_{k=1}^n k^2$. Заметим, что первая сумма не меньше нуля, третья сумма — это то, чем нам нужно оценить. Значит достаточно доказать, что $\sum_{k=1}^n kb_k$ неотрицательно. Заметим, что $\sum_{k=1}^n kb_k=\sum_{k=1}^n(b_k+b_{k+1}+\ldots+b_n)\geqslant 0$ по условию.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел (a,b), что a^2 делится на b, b^2 делится на a и $(b+1)^2$ делится на $a+1$.

Решение. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел a и b. Пусть $a=a_1d$ и $b=d_1b$. Тогда по условию $b_1^2d^2$ делится на a_1d, откуда (так как a_1 и b_1 взаимно просты) ясно, что d делится на a_1. Аналогично d делится на b_1 и, значит, $d=a_1b_1k$ (мы еще раз воспользовались взаимной простотой чисел a_1 и b_1). Тогда $a=a_1^2b_1k$ и $b=b_1^2a_1k$. Подставив эти равенства в последнее условие, получим, что $b_1^4a_1^2k^2+2b_1^2a_1k+1$ делится на $a_1^2b_1k+1$. Вычтем второе число из первого и сократим на b_1k. Тогда получаем, что $b_1^3a_1^2k+2a_1b_1-a_1^2$ делится на $a_1^2b_1k+1$. Заменим теперь $a_1^2b_1k$ на -1 в первом слагаемом выражения $b_1^3a_1^2k+2a_1b_1-a_1^2$ и получим, что $-(a_1-b_1)^2$ делится на $a_1^2b_1k+1$. Теперь отбросим минус у делимого (он не влияет на делимость) и рассмотрим несколько случаев. Во-первых, если $a_1=b_1$, то очевидно $a=b$ и такой случай подходит. Если $a_1>b_1$, то имеем неравенства $a_1^2b_1k+1>a_1^2\geqslant(a_1-b_1)^2$, что противоречит делимости. Тогда остается случай $b_1>a_1$. Из неравенства $b_1^2>(b_1-a_1)^2>a_1^2b_1$ получаем, что $b_1>a_1^2$. По модулю b_1 число $(b_1-a_1)^2$ сравнимо с a_1^2, которое, в свою очередь, меньше, чем b_1. Если записать $(b_1-a_1)^2=t(a_1^2b_1k+1)$ и посмореть на это равенство по модулю b_1, а также вспомнить, что $t<b_1$, то можно понять, что $t=a_1^2$. Отсюда мы выводим, что $b_1-2a_1=a_1^4k$. Значит b_1 делится на a_1, откуда (опять же, в силу взаимной простоты) ясно, что $a_1=1$. Тогда $b_1=k+2$ и мы получаем серию решений $a=k(k+2)$ и $b=k(k+2)^2$ для всех натуральных k.

Старшая лига

5. Функция $f(x)$, определенная при всех вещественных x, удовлетворяет равенствам $f(x) = f(x + T_1)$ при всех $x > A_1$ и $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_2$, где T_1, T_2 — данные положительные числа, A_1, A_2 — данные вещественные числа. Докажите, что $f(x) = f(x + T_2)$ при всех $x > A_1$.

Решение. Если $A_1 \geqslant A_2$, то это очевидно. В противном случае при всех $x > A_1$ выполнено равенство:

$$f\left(x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1\right) = f\left(x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1 + T_2\right)$$

(где за $\lceil w \rceil$ обозначено наименьшее целое число, не меньшее w), так как

$$x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1 \geqslant x + A_2 - A_1 > A_1 + A_2 - A_1 = A_2.$$

Однако

$$f(x) = f(x + T_1) = f(x + 2T_1) = \ldots = f\left(x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1\right),$$

и аналогично

$$f(x + T_2) = f\left(x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1 + T_2\right).$$

Поэтому $f(x) = f(x + T_2)$.

6. Натуральное число $k > 2$ и вещественные числа a, b таковы, что многочлен $x^k + ax + 1$ делится на многочлен $x^2 + bx + 1$. Докажите, что $a(a - b) = 0$.

Первое решение. Обозначим $P(x) = x^2 + bx + 1$. Пусть $a \neq 0$, иначе очевидно, что $a(a - b) = 0$. По теореме Виета корни (возможно, комплексные) многочлена $P(x)$ в произведении дают единицу. Обозначим их через u и $\frac{1}{u}$. Тогда из делимости первого многочлена на второй следует, что $u^k + au + 1 = 1/u^k + a/u + 1 = 0$. Отсюда $-a = (u^k + 1)/u = (u^k + 1)/u^{k-1}$, то есть $u^{k-2} = 1$, $u^2 + bu + 1 = 0 = u^k + au + 1 = u^2 + au + 1$, $a = b$.

Второе решение. Обозначим $P(x) = x^2 + bx + 1$. Пусть $a \neq 0$, иначе очевидно, что $a(a - b) = 0$. Если $x^k + ax + 1$ делится на $P(x)$, то $x^k + ax^{k-1} + 1$ тоже делится на $P(x)$. Тогда их разность $ax^{k-1} - ax$ делится на $P(x)$, а значит и $x^{k-2} - 1$ делится на $P(x)$. Остаток при делении $x^k + ax^{k-1} + 1$ на $x^{k-2} - 1$ равен $x^2 + ax + 1$, и он тоже будет делится на $P(x)$. Из $x^2 + bx + 1 \mid x^2 + ax + 1$ следует $a = b$.

7. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что если число x_n — простое, то n — либо степень числа 2, либо простое.

Решение. Заметим, что последовательность $y_n = (\alpha^n + \beta^n)/2$, где $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ и $\beta = 1 - \sqrt{2}$, подходит условию; также очевидно, что последовательность, подходящая условию, единственна, поэтому $x_n = y_n$ для всех n. Допустим, что y_n просто при некотором n, и n не простое число и не является степенью двойки. Тогда n имеет такой нечетный делитель $k > 1$, что $l = n/k > 1$. Из условия очевидно, что последовательность x_n строго возрастает, поэтому $x_n > x_l > 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} &= \frac{(\alpha^l)^k + (\beta^l)^k}{2} = \\ &= \frac{\alpha^l + \beta^l}{2} \cdot \left(\alpha^{l(k-1)}\beta^l + \alpha^{l(k-2)}\beta^{2l} + \ldots + \alpha^l \beta^{l(k-1)}\right) = x_l \cdot X.\end{aligned}$$

Заметим, что X является симметрическим многочленом от α и β с целыми коэффициентами, поэтому выражается через $\alpha + \beta = 2$ и $\alpha\beta = -1$ с целыми коэффициентами, значит, является целым. Отсюда простое x_n делится на x_l, что входит в противоречие с неравенством $x_n > x_l > 1$.

8. Найдите наименьшее положительное C такое, что неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{y}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{z}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{z+1} \leqslant C$$

выполнено для любых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1.$$

Решение. Сделаем замену: $a = 1/(x+1)$, $b = 1/(y+1)$, $c = 1/(z+1)$, откуда $x = (1-a)/a$, $y = (1-b)/b$, $z = (1-c)/c$, $a+b+c = 1$,

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{y}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{z}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{z+1} =$$
$$= (1-a)\sqrt{\frac{bc}{(1-b)(1-c)}} + (1-b)\sqrt{\frac{ca}{(1-c)(1-a)}} + (1-c)\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}} = W.$$

Возьмем $a = b = \varepsilon, c = 1-2\varepsilon$. Тогда

$$W = \sqrt{2}(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}} + \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon} > \sqrt{2}(1-\varepsilon)\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} = \sqrt{2}(1-2\varepsilon).$$

Если $0 < D < \sqrt{2}$, то приняв $\varepsilon = (1 - D/\sqrt{2})/2$, получим, что $W > D$. Поэтому требуемое C больше или равно $\sqrt{2}$.

Докажем, что W всегда не превосходит $\sqrt{2}$. Без ограничения общности, c является наибольшим среди чисел a, b, c. Заметим, что следующие неравенства верны:

$$(1-a)\sqrt{\frac{bc}{(1-b)(1-c)}} = (1-a)\sqrt{\frac{b}{1-c} \cdot \frac{c}{a+c}} \leqslant (1-a)\sqrt{\frac{b}{1-c}},$$

$$(1-b)\sqrt{\frac{ca}{(1-c)(1-a)}} = (1-b)\sqrt{\frac{a}{1-c} \cdot \frac{c}{b+c}} \leqslant (1-b)\sqrt{\frac{a}{1-c}},$$

$$a\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}} = a\sqrt{\frac{b}{1-a} \cdot \frac{a}{a+c}} \leqslant a\sqrt{\frac{b}{1-c}},$$

$$b\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}} = b\sqrt{\frac{a}{1-b} \cdot \frac{b}{b+c}} \leqslant a\sqrt{\frac{a}{1-c}}.$$

Если их сложить, получим, что

$$W \leqslant \sqrt{\frac{a}{1-c}} + \sqrt{\frac{b}{1-c}}.$$

Заметим, что сумма подкоренных выражений равна 1, поэтому по неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим имеем, что

$$W \leqslant 2\sqrt{1/2} = \sqrt{2}.$$

Поэтому $C \leqslant \sqrt{2}$, а значит $C = \sqrt{2}$.

Геометрия

Младшая лига

9. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в ее середине M. Так же известно, что $\angle BDC = 90°$. Найдите углы параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$. *Решение.* См. рис. 1. Так как $BM \parallel AD$, то углы DAM и AMB равны как накрест лежащие. Так как AM — биссектреса угла A, то получаем, что $\angle BAM = \angle AMB$. Значит, треугольник ABM равнобедренный. Следовательно, $AB = BM$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$. Проведем медиану DM треугольника BCD. Так как это медиана, проведенная к гипотенузе, то она равна половине стороны BC, то есть $DM = MC$. Имеем $DM = MC = MB = AB = CD$. Значит, треугольник CDM равносторонний. Следовательно, угол C равен $60°$.

10. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали перпендикулярны. Точки K и L на боковых сторонах AB и CD соответственно таковы, что отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и параллелен ее основаниям. На боковой стороне AB отмечена точка M такая, что $AM = BK$. Докажите, что $LM = AB$.

Решение. См. рис. 2. Обозначим через O точку пересечения диагоналей трапеции. Покажем, что $KO = OL$. Действительно, $\dfrac{KO}{BC} = \dfrac{AK}{AB}$ из подобия треугольников AKO и ABC. Далее, $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{DL}{DC}$ из теоремы Фалеса. Наконец,

$\dfrac{DL}{DC} = \dfrac{OL}{BC}$, на этот раз из подобие треугольников DOL и DBC. Соединяя все эти равенства, имеем $KO = OL$. Теперь обозначим середину боковой стороны AB через T, по условию она же будет серединой отрезка KM. Тогда TO — средняя линия треугольника MKL, откуда $ML = 2TO$. С другой стороны, отрезок TO является медианой прямоугольного треугольника BOA (он прямоугольный в силу перпендикулярности диагоналей), откуда следует что $2TO = AB$, так как медиана прямоугольного треугольника в два раза меньше его гипотенузы. Сопоставляя эти два равенства, получаем требуемое.

11. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

См. рис. 3.

Первое решение. Пусть D — точка касания вписанной окружности со стороной AC, точка Q лежит на дуге FE, не содержащей D, а точка P — на дуге FD, не содержащей E. Тогда точка Q' лежит на продолжении стороны AC за точку C, а P' лежит на продолжении стороны AC за точку A. Докажем, что $\angle P'FA = \angle Q'EC$, тогда треугольники $Q'FA$ и $P'EC$ равны по стороне $FA = (AD = DC) = EC$ (это следует того, что точка касания основания вписанной окружностью в равнобедренном треугольнике совпадает со серединой) и равных пар углов $\angle P'FA = \angle Q'EC$ и $\angle FAP' = \angle ECQ'$ (последние углы дополняют до 180^o углы при основании равнобедренного треугольника). Отсюда $Q'A = CP'$. Итак, покажем, что $\angle P'FA = \angle Q'EC$. Заметим, что около четырехугольника $P'FPA$ можно описать окружность, так как $\angle PP'A = \angle PEF = \angle AFP$ (первое равенство следует из равенства вертикальных углов при параллельных прямых FE и $P'A$ и секущей PE, а второе — как равенство угла между касательной и хордой и угла, опирающегося на эту хорду). Теперь $\angle Q'EC = \angle QEB = \angle QPE = \angle PP'A = \angle P'FA$ (первое и третье равенства — это равенства вертикальных углов, второе — равенство угла между касательной и хордой и угла, опирающегося на эту хорду, а четвертое — равенство углов, опирающихся на одну дугу $P'A$ в вписанном четырехугольнике $P'FPA$). Полученное равенство завершает доказательство.

Второе решение. Отметим точку касания вписанной окружности со стороной AC, точку D. Так как треугольник

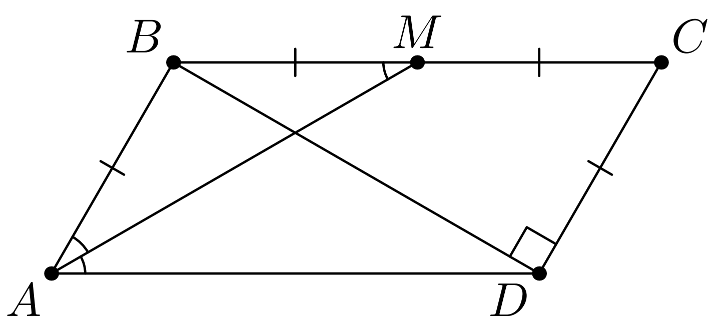

Рис. 1: К задаче 9

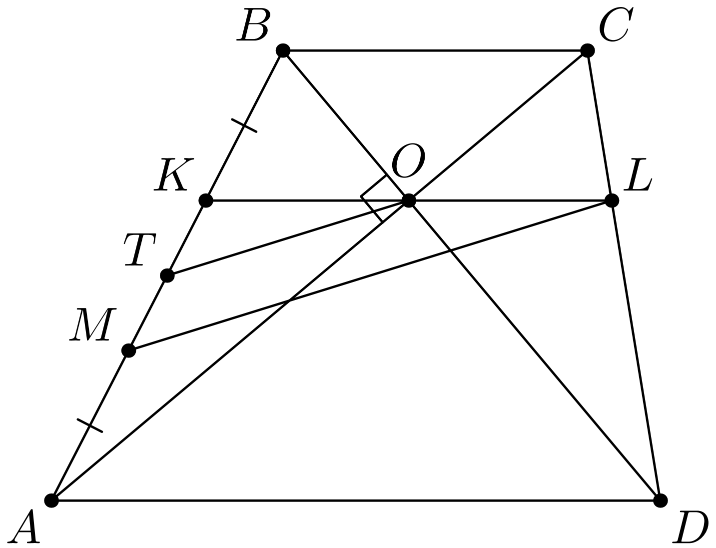

Рис. 2: К задаче 10

равнобедренный, то $DA = DC$. Следовательно, утверждение задачи равносильно равенству $DP' = DQ'$. Заметим, что четырехугольник $FPDQ$ гармонический, поскольку касательные в точках F и D пересекаются на его диагонали PQ. Значит, двойное отношение точек $(F, P; D, Q)$ равно -1. Спроектируем эту четверку из точки E на прямую AC. P перейдет в P', Q перейдет в Q', D в себя, F в бесконечно удаленную точку прямой AC. Следовательно, так как двойное отношение останется гармоническим, D будет серединой $P'Q'$.

12. Верно ли, что любой треугольник площади 3 можно покрыть выпуклым многоугольником площади 5, имеющим ось симметрии?

Решение. Пусть нам дан треугольник ABC. Не умаляя общности обозначим длины его сторон BC, AC и AB через $a \geqslant b \geqslant c$ соответственно. Отложим на луче AB точку D такую, что $AD = AC = b$. Тогда треугольник CAD равнобедренный, а следовательно, имеет ось симметрии (серединный перпендикуляр к основанию). Проведем из точки C высоту CH на сторону AB и обозначим ее длину через h. Тогда $S_{ABC} = \dfrac{h \cdot c}{2}$, а $S_{CAD} = \dfrac{h \cdot b}{2}$. То есть $\dfrac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \dfrac{h \cdot b}{2} \cdot \dfrac{2}{h \cdot c} = \dfrac{b}{c}$. Аналогично можно построить равнобедренный треугольник с вершиной в точке C и двумя сторонами, равными a, и площадью, превосходящей S_{ABC} в $\dfrac{a}{b}$ раз. Нам осталось показать, что либо $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{5}{3}$, либо $\dfrac{b}{c} \leqslant \dfrac{5}{3}$. Предположим противное. Тогда $\dfrac{5}{3}b < a$ и $c < \dfrac{3}{5}b$. Отсюда $\dfrac{5}{3}b < a < b + c < b + \dfrac{3}{5}b = \dfrac{8}{5}b$. Получаем противоречие так, как $\dfrac{8}{5} < \dfrac{5}{3}$.

Старшая лига

13. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне CB выбрана точка Q такая, что $\dfrac{BQ}{QC} = 2$. Докажите, что $\angle QAB = \angle QMC$.

Решение. См. рис. 4. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно C. Тогда BC — медиана в треугольнике $AA'B$. Так как точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, то Q является точкой пересечения медиан треугольника $AA'B$. Значит, медиана $A'M$ проходит через Q. Так как медиана BC является одновременно и высотой, то треугольник $AA'B$ равнобедренный. Следовательно, $\angle QAB = \angle QA'B$. CM — средняя линия в треугольнике $AA'B$, а значит, параллельна $A'C$. Следовательно, угол $QA'B$ равен углу QMC как накрест лежащий, ч. т. д.

14. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

См. решение задачи 11 младшей лиги.

15. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана произвольная точка P. Обозначим радиус описанной сферы этого тетраэдра

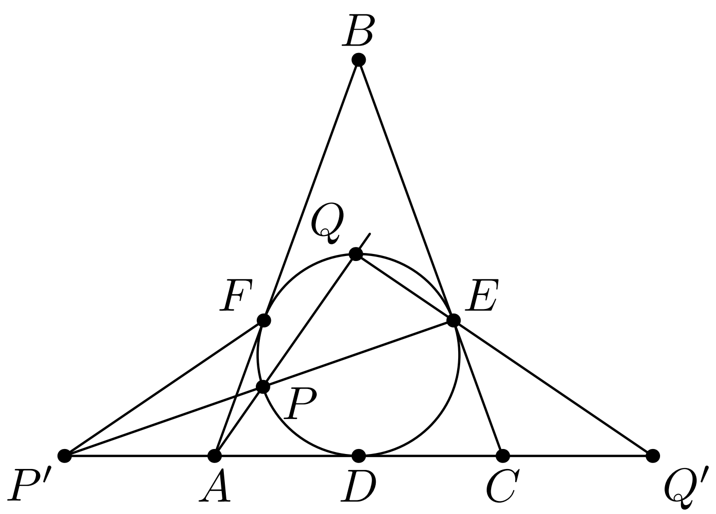

Рис. 3: К задаче 11

через R, а расстояние от точки P до центра этой сферы через x. Докажите неравенства

$$(R+x)\cdot(R-x)^3 \leqslant PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD \leqslant (R+x)^3\cdot(R-x).$$

Решение. Пусть лучи PA, PB, PC, PD пересекают описанную сферу в точках A', B', C', D' соответственно. По теореме о степени точки имеем $PA\cdot PA' = PB\cdot PB' = PC\cdot PC' = PD\cdot PD' = R^2-x^2$. Так что если, например, $PA' \leqslant PB$, то умножая это неравенство на PA и неравенства треугольника $R-x \leqslant PC$, $R-x \leqslant PD$ получаем левое неравенство. Аналогично установим правое неравенство, если $PA' \geqslant PB$.
Обозначим через α, β, γ, δ углы $\angle OPA$, $\angle OPB$, $\angle OPC$, $\angle OPD$ соответственно. Треугольники OPA', OPB имеют пары равных сторон x и R, причем $R > x$. Несложно видеть, что в этом случае, чем меньше угол, лежащий против стороны длины R, тем больше третья сторона треугольника. Значит, $PA' \leqslant PB$ если и только если $\pi-\alpha \geqslant \beta$. Резюмируя эти наблюдения получаем, что достаточно среди углов α, β, γ, δ найти два с суммой не меньше π и два с суммой не больше π.
Рассмотрим плоскость σ, проходящую через P перпендикулярно OP. Все точки A, B, C, D не могут лежать по одну сторону от нее. Если по каждую сторону лежат две точки, то требуемое очевидно. Пусть по одну сторону лежит только точка PA (например, по ту же, где точка O). Тогда угол α острый, β, γ, δ тупые. Достаточно доказать, что один из этих тупых углов не больше $\pi-\alpha$. Если это не так, то все точки B, C, D лежат в конусе с образующей PA' и осью, идущей по продолжению отрезка OP за точку P. Но тогда P не лежит внутри тетраэдра. Противоречие.

16. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC треугольника, обозначим через I_A, а точку ее касания с этой стороной — через A_1. Аналогично определим точки I_B, I_C, B_1, C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_AA_1, BI_BB_1 и CI_CC_1 имеют две общие точки.

Первое решение. Проведем описанную окружность треугольника ABC. Отметим центр I вписанной окружности $\triangle ABC$ и середину дуги BC описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей точку A, точку A'. Тогда по лемме о трезубце A' есть середина отрезка II_A. Значит, $IA\cdot II_A = 2IA\cdot IA'$. То есть степень точки I относительно описанной окружности $\triangle AA_1I_A$ в два раза больше степени точки I относительно описанной окружности $\triangle ABC$. Аналогичное можно сказать и про другие окружности из условия. Значит, I имеет одинаковую степень относительно всех трех окружностей. Проведем внешнюю биссектрису угла A до пересечения со стороной BC в точке L_A. Аналогично определим точки L_B и L_C. См. рис. 5. Отметим, что точки L_A, L_B, L_C лежат на одной прямой. Так как AI_A — биссектриса угла A, то угол L_AAI_A прямой. Следовательно, точки L_A, I_A, A_1 и A лежат на одной окружности с диаметром L_AI_A. Аналогичное верно и для других окружностей. Значит, центры рассматриваемых окружностей суть середины отрезков I_AL_A, I_BL_B, I_CL_C. Но они лежат на прямой Гаусса четырехсторонника, образованного внешними биссектрисами треугольника ABC и прямой, проходящей через основания внешних биссектрис. А раз центры лежат на одной прямой, то либо окружности не имеют радикального центра, либо у них общая радикальная ось. Но, так как есть точка, имеющая одинаковую степень относительно всех трех окружностей и лежащая внутри каждой из этих окружностей (на хордах AI_A, BI_B, CI_C), то окружности имеют общую радикальную ось и все ее пересекают. Следовательно, имеют две общие точки, ч. т. д. *Второе решение.* Воспользуемся доказательством того, что рассматриваемые окружности суть окружности с диаметрами L_AI_A, L_BI_B, L_CI_C. Тогда эти окружности имеют

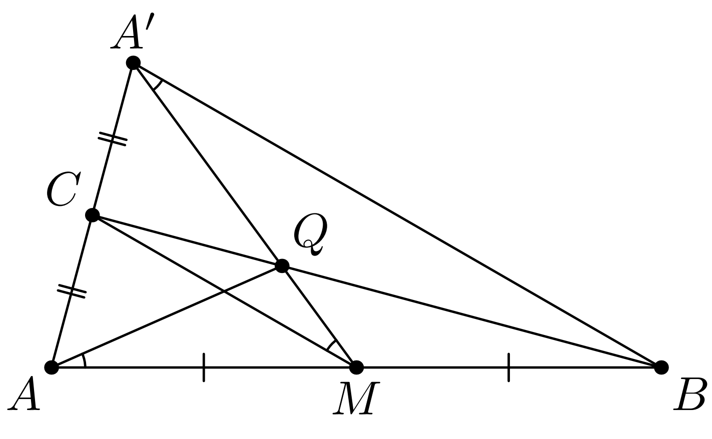

Рис. 4: К задаче 13

общие точки просто по теореме Плюккера. Другими словами, все эти окружности имеют общую радикальную ось — прямую Обера соответственного четырехсторонника. Значит, имеют две общие точки.

Комбинаторика и логика

Младшая лига

17. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Лу́зина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Лебедевым. Соседи Лихачёва — Соловьёв и физик. Какая профессия у Лузина?

Ответ: Математик. *Решение.* Лузин не может быть ни филологом (так как сидел напротив), ни историком (с которым сидел рядом). Значит, он либо физик, либо математик. Если Лузин физик, то Лихачёв сидел между физиком Лузиным и филологом Соловьёвым. Но тогда математик не может сидеть рядом с Лебедевым — противоречие. Значит, Лузин — математик. Можно убедиться, что в этом случае все сходится. Действительно, физик не Лихачёв, не Соловьёв и не Лузин — значит, Лебедев. Рядом с Лихачёвым нет Лузина, значит, Лихачёв напротив Лузина, то есть он — филолог. Тогда Соловьёв — историк, и сидят они в таком порядке: математик Лузин, физик Лебедев, филолог Лихачёв и историк Соловьёв.

18. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2012. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может делать это в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел всегда была составным числом.

Решение. Заметим, что сумма $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ — составное число при $n > 2$. Поэтому будем вычеркивать каждый раз самое большое число, пока не останутся 1, 2, 3 и 4. Далее вычеркиваем по порядку 1, 3, 2, оставляя соответственно суммы 9, 6, 4.

19. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 10 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

Ответ: 331. *Решение.* Будем проводить отрезки по одному. Число добавленных частей равно числу частей, на которые разбивается отрезок точками пересечения. Значит, чем больше точек пересечения, тем больше частей. Максимум частей будет, когда каждый отрезок пересекает каждый из отрезков, проведенный из других вершин, причем в своей точке. Для этого достаточно проводить отрезки не через имеющиеся точки пересечения. Для 10

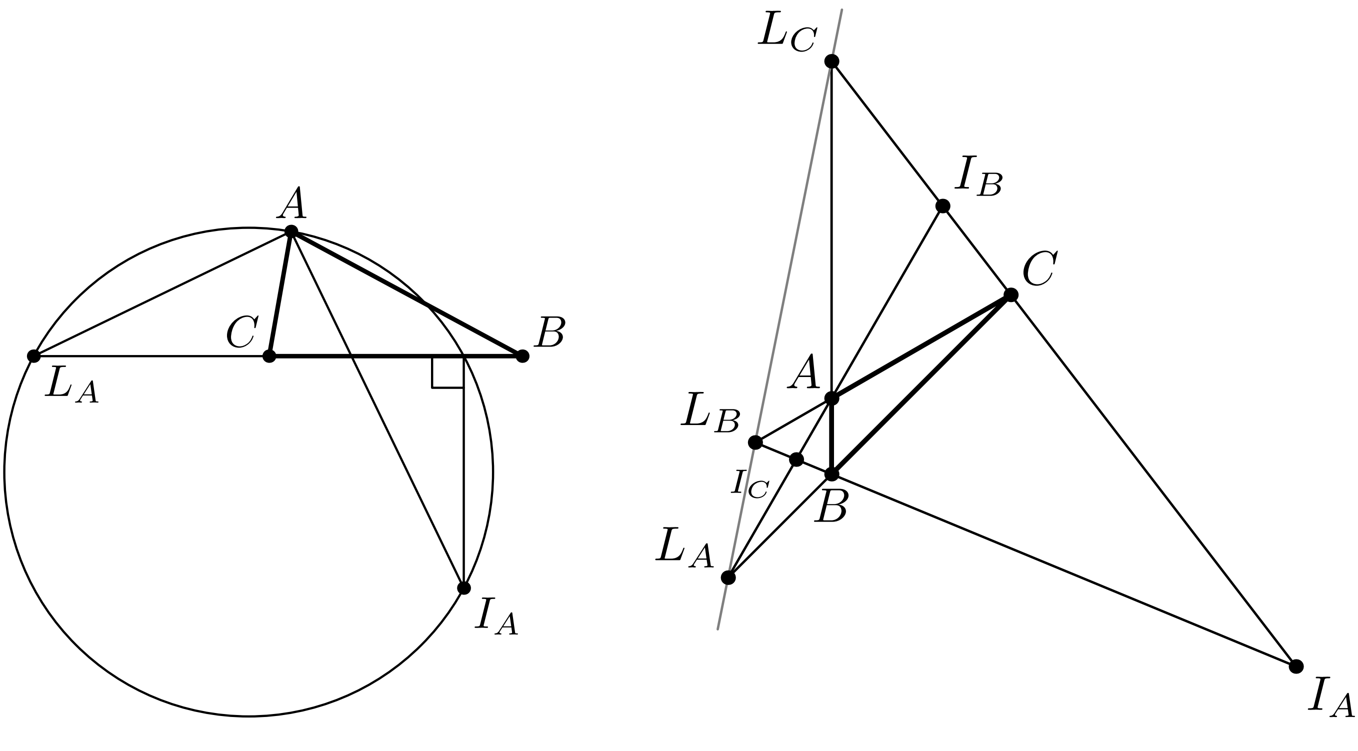

Рис. 5: К задаче 16

отрезков из первой вершины каждый добавит по одной части. Для 10 отрезков из второй вершины на каждом будет по 10 точек пересечения, значит, каждый добавит по 11 частей. Для 10 отрезков из третьей вершины на каждом будет по 20 точек пересечения, значит, каждый добавит по 21 частей. Итого, $1 + 10 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 21 = 331$.

20. Паули и Бор играют в следующую игру. Имеется куча из 99! молекул. За один ход из кучи разрешается взять не более, чем 1% от оставшихся молекул. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Ходят поочередно, начинает Паули. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Паули. *Решение.* Рассмотрим игру по тем же правилам для кучи с $99! - 1$ молекулой (назовем эту игру *меньшей*). Поскольку игра закончится за конечное число ходов и ничьих нет, то у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Возможны два случая.
(1) В меньшей игре выигрывает второй. Тогда в исходной игре Паули первым ходом берет одну молекулу. Тем самым он сведет ситуацию к меньшей игре, где ходит вторым, и поэтому выиграет.
(2) В меньшей игре выигрывает первый, взяв первым ходом x камней. Тогда по условию $x \leqslant \frac{99!-1}{100}$. Так как 99! кратно 100, то $x + 1 \leqslant \frac{99!}{100}$. Это значит, что в исходной игре Паули имеет право первым ходом взять $x + 1$ камень. Тогда он попадет в ситуацию после выигрышного хода первого игрока в меньшей игре. Действуя далее как этот игрок, он выиграет.

21. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 40×40 м, разбитый коридорами на квадратики 5×5 м. В каждой вершине такого квадратика — выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины пятиметровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторож находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли он добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти, не щелкая выключателями?

Ответ: нет. *Решение.* Ясно, что сторож не может осветить все коридоры — последним щелчком он выключит свет в коридоре, по которому пришел в узел. Раскрасим узлы в шахматном порядке в черный и белый цвета. Чтобы коридор был освещен, необходимо и достаточно, чтобы на одном его конце выключателем щелкнули четное число раз, а на другом — нечетное. Допустим, нам удалось осветить объект как требуется в условии. Двигаясь от узла к узлу по освещенным коридорам, мы будем чередовать цвет и четность, поэтому все узлы одинакового цвета будут иметь одинаковую четность, а разного — разную. Но тогда концы каждого коридора — разной четности, то есть будут освещены все коридоры — противоречие.

Старшая лига

22. 77 жителей острова лжецов и рыцарей стали в круг. Всем известно, что их веса различны. На вопрос «У тебя есть сосед-лжец легче тебя?» все ответили «Да». После перерыва они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос «У тебя есть сосед-рыцарь легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

Решение. Самый легкий житель в круге солгал, поэтому он лжец. Но тогда он так же солжет, сказав «Да» и во второй раз. В круге нет соседей-лжецов, иначе более тяжелый из них ответил бы «Нет» на первый вопрос. Значит, в круге одинокие лжецы чередуются с группами из подряд идущих рыцарей. Ясно, что групп рыцарей столько же, сколько лжецов. Поэтому рыцарей не меньше, чем лжецов, а ввиду нечетности — больше. Тогда есть группа из не менее чем двух рыцарей. Более тяжелый из них на второй вопрос ответит «Да».

23. По кругу стоит 101 блюдце, на каждом по конфете. Сначала Малыш выбирает натуральное $m < 101$ и сообщает его Карлсону, затем Карлсон — натуральное $k < 101$. Малыш берет конфету с любого блюдца. Отсчитав от этого блюдца k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету. Отсчитав уже от этого блюдца m-е блюдце по часовой стрелке, Малыш берет с него конфету (если она там еще есть). Отсчитав от блюдца Малыша k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету (если она там еще есть), и т. д. Какое наибольшее число конфет может гарантировать себе Карлсон?

Ответ: 99. *Решение.* Карлсону достаточно взять $k = 101 - 2m$ (при $m < 51$) или $k = 202 - 2m$ (при $m \geqslant 51$). Тогда Карлсон фактически отсчитывает $2m$ против часовой стрелки. Обозначив первое блюдце Малыша через 0, далее указываем номер при отсчете от него против часовой стрелки. Тогда Малышу достаются блюдца 0, m, $2m$, $3m$, $\ldots$, а Карлсону — $2m$, $3m$, $4m$, $\ldots$. Как видим, начиная с третьего хода Малышу достается блюдце, опустошенное

Карлсоном 2 хода назад. Поэтому больше двух конфет Малыш не получит. С другой стороны, ввиду простоты числа 101 числа m и 101 взаимно просты, поэтому среди чисел $2m$, $3m$, $4m$ встретятся всевозможные остатки по модулю m. Значит, конфеты будут взяты со всех блюдец, поэтому Карлсон захватит $(101-2)$ конфеты.

24. От таблицы результатов однокругового футбольного турнира 10 команд осталось только суммарное количество забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математику этого хватило, чтобы восстановить счёт в каждом матче. Какое наименьшее количество из этих 20 чисел могло быть нулями?

Ответ: 0. *Решение.* Если общее количество мячей, забитых командой A, равно суммарному количеству мячей, пропущенными остальными командами, и то же верно для пропущенных командой A и суммой забитых остальными, то все мячи были забиты и пропущены только в матчах с командой A. Тогда напротив всех, кроме A, стоит счет во встрече с командой A, а все остальные встречи завершились `0:0`.

25. В вершинах выпуклого многогранника с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n-1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

Решение. Поскольку граф многогранника связен, достаточно доказать для остовного дерева. Индукция по n. Пусть висячая вершина A связана ребром с вершиной B, синие и красные числа — это c и k в A, c' и k' в B. Возможны 3 случая.

(1) $c = k$. Тогда выкинем A и ребро AB.

(2) $c > k$. Заменим c и c' на k и $c' + c - k$, после чего выкинем A и ребро AB.

(3) $c < k$. Временно выкинем A и ребро AB и заменим k' на $k' + k - c$. Теперь в оставшемся графе суммы синих и красных равны. Добьемся равенства всех синих и красных не более чем за $n-2$ шага. Вернем на место A и ребро AB и восстановим значение k'. Последним ходом заменим на ребре AB синие числа c и $k' + k - c$ на k и k'.

26. Даны натуральные числа r и n, $r \leqslant n$. Рассматриваются всевозможные упорядоченные наборы $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ неотрицательных целых чисел, такие, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = r$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$. Для каждого набора вычислена дробь $\frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ (напомним, что $0! = 1$). Докажите, что сумма этих дробей равна $\frac{(n-1)!}{(n-r)!r!(r-1)!}$.

Первое решение. Рассмотрим все разбиения числа n в сумму r натуральных слагаемых с учетом порядка. Их ровно $C_{n-1}^{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$ (берем палочку длины n, разбитую на единичные отрезки $n-1$ точкой, и из них выбираем $r-1$, по которым режем на r частей). С другой стороны, если в таком разбиении k_1 единиц, k_2 двоек и так далее, то $\sum k_i = r$, $\sum ik_i = n$, а количество разбиений в точности $\frac{r!}{\prod k_i!}$ (выпишем наши r слагаемых считая их как бы различными — это можно сделать $r!$ способами; а потом вспомним, что от порядка, допустим, единиц на деле ничего не зависит).

Второе решение. Рассмотрим перестановки $\pi \in S_n$ с ровно r циклами, в каждом из которых помечен один элемент. Иными словами, у нас будет r ориентированных окружностей, на них выписаны в совокупности по разу числа от 1 до n, и на каждой окружности одно число отмечено. Порядок окружностей роли не играет. Если зафиксировать количество k_i циклов длины i (окружностей с ровно i числами), то таких помеченных перестановок будет $\frac{n!}{\prod k_i!}$ (берем любую перестановку и выписываем в ряд элементы ее циклов, циклы берутся по возрастанию длины, в каждом цикле элементы выписываются начиная с отмеченного. Например, для перестановки (7)(3)(6)(12)(45) с отмеченными элементами 7, 3, 6, 2, 4 мы получим перестановки 3762145, 6734521 и так далее, всего $\prod k_i!$ перестановок. Но любая перестановка чисел от 1 до n будет выписана ровно один раз, так что $N \prod k_i! = n!$, где N есть число рассматриваемых помеченных перестановок.) Мы хотим доказать, что общее число таких помеченных перестановок равно $C_n^r r(r+1)\ldots(n-1)$. Фиксируем r отмеченных элементов, каждый поставим на свою окружность. Берем первый еще не поставленный на окружности элемент x, его можно поставить в r мест (одно место на каждой окружности). Для второго элемента есть уже $r+1$ место, и так далее.

Командная олимпиада

Младшая лига

27. (2) Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

Ответ: смогут. *Решение.* Обозначим жуликов буквами A, B, C. Сначала C перевозит свои чемоданы, затем он (без багажа) возвращается обратно и перевозит A и B (без багажа). После этого A и B возвращаются, и A перевозит свои чемоданы. Наконец A и C возвращаются и перевозят B, который возвращается один за своими чемоданами.

28. (2) У Саши есть 5 кульков с конфетами. Выбирая всевозможными способами пару кульков и подсчитывая суммарное число конфет в них, Саша заметил, что суммы принимают только три значения: 53, 66 и 79. Сколько конфет в каждом кульке?

Ответ: 20, 33, 33, 33, 46. *Решение.* Для каждого кулька выпишем число конфет в нем. Среди этих чисел есть одинаковые (иначе, добавляя одно к остальным, получили бы четыре разных суммы). Сумма двух одинаковых — число четное, то есть 66. Значит, все одинаковые числа равны 33. Теперь ясно, что все нечетные числа равны 33 (иначе вместе с 33 не получим 66), а каждое четное равно либо $53 - 33 = 20$, либо $79 - 33 = 46$, причем оба эти случая реализуются. Отсюда ответ.

29. (3) Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающие к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

Ответ: $\dfrac{ac}{a+b}$, $\dfrac{bc}{a+b}$. *Решение.* Пусть KL — линия сгиба, C — упомянутая вершина, C' — ее положение после перегиба. Отрезок CC' составлен из высот равных треугольников KCL и $KC'L$. Углы CKL и CLK равны как смежные к равным углам четырехугольника, значит, треугольник KCL — равнобедренный. Поэтому CC' — биссектриса угла C, и делит сторону c на указанные в ответе отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

30. (5) Из клетчатой доски 20×12 вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

Ответ: нельзя. *Решение.* Раскрасим вертикали по очереди в черный и белый цвет. Тогда фигурка при любом положении накрывает нечетное число белых клеток: 3 или 1. Оставшуюся часть доски из 236 оставшихся клеток надо разрезать на 59 фигурок. В них войдет нечетное число белых клеток, тогда как осталось 128 белых клеток — число четное. Значит, разрезать нельзя.

31. (5) Пусть x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2+8x^2y^2+y^2 \leqslant 1$.

Решение. $1 \geqslant (x+y)^2 \geqslant 4xy$, поэтому $2xy \geqslant 2xy \cdot 4xy = 8x^2y^2$. Отсюда $x^2+8x^2y^2+y^2 \leqslant x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \leqslant 1$.

32. (5) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

Решение. Отметим на AB точку M, а на BC — точку N так, чтобы $AM = CN = \frac{1}{4}AB$. Отметим также точки M_1 и N_1 — середины AB и BC. На отрезке MN отметим точки M_2 и N_2 пересечения отрезков AN_1 и CM_1 с отрезком MN. Нетрудно убедиться, что $M_2M = N_2N = AB/4$. Покажем, что искомое ГМТ совпадает с отрезком M_2N_2. Ясно, что L и K лежат по разные стороны от прямой MN и $KM = LN$. Без ограничения общности считаем, что K лежит на отрезке BM. Проведем через K прямую параллельно BN до пересечения с MN в некоторой точке D. Стороны треугольников MKD и ABC параллельны, поэтому MKD — равнобедренный, $MK = KD$. Отрезки KD и NL равны и параллельны, значит, $KNLD$ — параллелограмм, и середина E отрезка KL лежит на DN; кроме того, $NE > N_2N$ и $ME > M_2M$, так как если K' точка симметричная L относительно N и L' точка симметричная K относительно M, то $NE = KK'/2 > M_1N_1/2 = NN_2$ и $ME = LL'/2 > M_1N_1/2 = MM_2$. Значит $E \in M_2N_2$. Обратно, пусть E — точка на M_2N_2, и, скажем, $EN_2 < EM_2$. Отложив на EM отрезок $ED = EN$, проведя через

D прямую параллельно BN до пересечения с BM в точке K и отложив на луче NC отрезок $NL = DK$, получим нужные нам отрезок KL с серединой E (несложно проверить, что L будет лежать на BC).

33. (6) В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел *плохой*, если их сумма кратна 7 и левое больше правого, либо их сумма не кратна 7 и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

Решение. Будем по тому же правилу определять плохие пары и для несоседних чисел. При каждой перестановке общее число плохих пар уменьшается на 1, отрицательным оно стать не может, поэтому рано или поздно процесс закончится.

34. (9) В ряд стоит 1111 блюдец, на них лежат 1, 2, 3, ..., 555, 556, 555, 554, ..., 2, 1 орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюдца на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюдца. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?

Ответ: выигрывает Вася. *Решение.* Отметим блюдца с нечетным числом орехов (они идут через одно). Разобьем их на пары с одинаковым числом орехов. Пусть Вася все ходы делает только из отмеченных блюдец. Каждым ходом Петя нарушает равенство для какой-то пары отмеченных блюдец. Пусть Вася равенство восстанавливает: если Петя добавил орехи в блюдце пары, Вася их убирает; а если Вася убрал какое-то число орехов с одного блюдца пары, Вася убирает столько же из другого. В результате Вася всегда может сделать ход, поэтому он не проиграет, а так как игра конечна, то выиграет.

35. (11) Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом.

Решение. Заметим, что $(a^2-t^2)(b^2-t^2) = a^2b^2-(a^2+b^2)t^2+t^4 = (a^2b^2-2abt^2+t^4)-(a^2-2ab+b^2)t^2 = (ab-t^2)^2-(a-b)^2t^2$. Пусть $a-b = c-d = t$. Тогда $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)(a+2)(b+2)(c+2)(d+2) = (a^2-4)(b^2-4)(c^2-4)(d^2-4) = \big((ab-4)^2-4t^2\big)\big((cd-4)^2-4t^2\big) = \big((ab-4)(cd-4)-4t^2\big)^2 - 4(ab-cd)^2t^2$. Взяв $a = n+2$, $b = n$, $c = n+1$, $d = n-1$, получим $t = 2$, $ab = n^2+2n$, $cd = n^2-1$, и $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \big((n^2+2n-4)(n^2-5)-16\big)^2 - 16(2n+1)^2$. При $n \leqslant 7$ число $((n^2+2n-4)(n^2-5)-16)^2$ — ближайший квадрат к произведению P_n чисел от $n-3$ до $n+4$. Действительно, при уменьшении числа $(n^2+2n-4)(n^2-5)-16$ на единицу его квадрат уменьшится на число порядка $2n^4$, что больше числа $16(2n+1)^2$. Для $n = 6$ эта формула «не точна»: она дает $P_6 = 1348^2 - 52^2$, но здесь первый квадрат можно уменьшить: $1348^2 - 52^2 = 1347^2 - 3^2$. Соответственно, $P_5 = 604^2 - 44^2 = 603^2 - 27^2$, $P_4 = 204^2 - 36^2 = 201^2 - 9^2$. *Замечание.* Мы использовали частный случай более общей формулы $(a^2-c^2)(b^2-d^2) = (ab-cd)^2 - (ad-bc)^2$.

36. (12) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

Первое решение. См. рис. 6. Обозначим угол $x = \pi/7$. Заметим, что $ABCD$ и $ABCG$ — равнобокие трапеции, так что $ABCH$ — параллелограмм, а следовательно и ромб. Таким образом, $AH = HC = 1$. Пусть лучи GA, CB пересекаются в точке M. Считая вписанные углы в семиугольнике получаем, что $\angle AMC = 3x$, $\angle ACM = x$, так что треугольник ACM равнобедренный, $AC = CM$. Далее, треугольники HCM, HAF равны по двум сторонам и углу $2x$ между ними, так что $HF = HM$ и $\angle FHM = \angle FHA + \angle AHM = \angle CHM + \angle AHM = 5x$, так что можно построить правильный семиугольник $FHMLKJI$. Пусть отрезки MJ, HK пересекаются в точке N. Тогда $NM = HM$ (это равенство аналогично $AH = GA$, но в новом семиугольнике), $GM = CM$ из симметрии, $\angle NMG = \angle NMH - \angle GMH = \angle GMC - \angle GMH = \angle HMC$. Значит, треугольники NGM, HCM равны по двум сторонам и углу между ними, так что $NG = HC = 1$ и $\angle NGM = \angle HCM = 2x = \pi - \angle FGA$. Таким образом, G есть середина FN и $FN = 2$. Отношения $1 : FH$ и $FH : 2$ оказываются соответственными отношениями в двух наших правильных семиугольниках, так что они равны, что и требовалось доказать.

Второе решение. Как и в первом решении, начнем с наблюдения, что $ABCH$ — параллелограмм, пусть U — общая середина его диагоналей, V — середина BF. Тогда $FH = 2UV$ по теореме о средней линии треугольника BHF. Нам понадобится такой общий факт: если X_1, X_2, X_3, X_4 любые 4 точки плоскости, M_{ij} — середины соответствующих отрезков X_iX_j, то

$$4M_{13}M_{24}^2 = X_1X_2^2 + X_2X_3^2 + X_3X_4^2 + X_4X_1^2 - X_1X_3^2 - X_2X_4^2.$$

Установить его можно, например, рассмотрев параллелограммы Вариньона $M_{ij}M_{jk}M_{kl}M_{li}$ для перестановок $(i,j,k,l) = (1,2,3,4), (1,3,2,4), (1,2,4,3)$, написав для них равенства параллелограмма и вычтя из суммы двух третье. Или применяя декартовы координаты. Рассматривая четырехугольник $X_1X_2X_3X_4 = ABCF$ мы видим, что $X_3X_4 = X_4X_2$, $X_1X_3 = X_1X_4$, так что $4UV^2 = AB^2 + BC^2 = 2$, что и требовалось.

Старшая лига

37. (3) На доске написано несколько различных чисел, причем известно, что среди любых трех чисел, написанных на доске, есть два числа, сумма которых также написана на доске. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

Ответ: 7. *Решение.* Во-первых заметим, что можно добавить к числам 0, если его там нет, и условие сохранится. Во вторых, заметим, что можно отдельно изучать положительние числа, написанные на доске, и отдельно для них тоже условие выполняется. Рассмотрим только положительные числа. Пусть наибольшее из них число — это A. Пусть B — второе по величине положительное число. Рассмотрим тройку (A, B, x), где x любое другое имеющееся на доске положительное число. Ясно, что тогда на доске не может быть сумма $A+B$ и $A+x$ — они больше, чем A. Значит на доске есть число $B+x$, и, так как оно больше, чем B — это A. Значит любое другое положительное число на доске, кроме A и B — это $A - B$. Отсюда ясно, что положительных чисел на доске не больше трех. Аналогично доказывается, что отрицательных чисел на доске тоже не больше трех. Значит всего чисел на доске не более семи. Для семи существует пример: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

38. (4) Найдите все функции $f\colon [-2;2] \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных x и y верно равенство $f(\sin x + \cos y) + f(\sin y + \cos x) = \sin(x+y)$.

Решение. Подставим $y = \pi/2 + x$, получим $f(0) + f(2\cos x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, откуда $f(t) = t^2/2 - (f(0)+1)$ для любого $t \in [-2,2]$. Подставляя $t = 0$ находим $f(0) = -1/2$, $f(t) = t^2/2 - 1/2$. Легко видеть, что такая функция подходит.

39. (5) По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, и обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются *хлипкие* весы — это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма, однако, показывают при этом, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на хлипких весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

Решение. Пронумеруем монеты от 1 до 17. Положим на одну чашу весов монеты 1, 2, 4, 6, 14, 16, а на вторую чашу весов монеты с номерами 3, 5, 7, 8, 10, 12. Если весы сломались, то мы нашли фальшивую пару. Если весы в равновесии, то фальшивые монеты есть на обеих чашах по одной (так как, очевидно, наши взвешивания задели

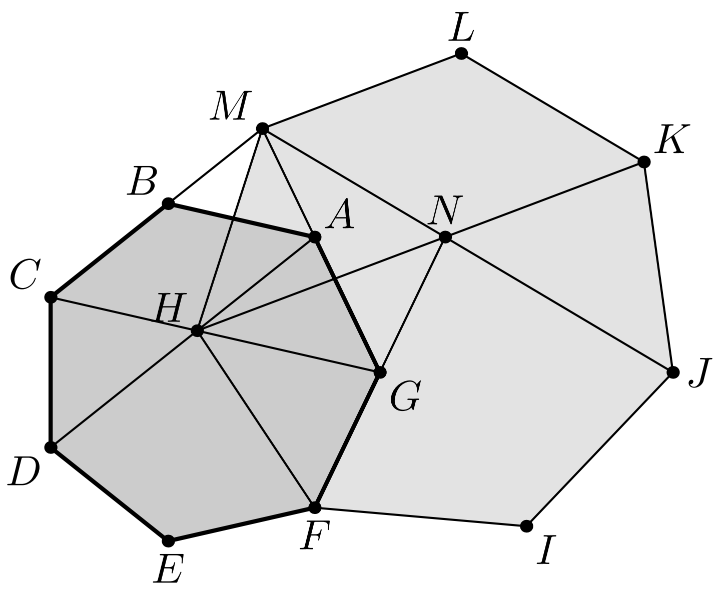

Рис. 6: К задаче 36

любую пару последовательных монет), и значит, пара фальшивых монет — это любая пара от $(2,3)$ до $(6,7)$. Если первая чаша легче второй, то на ней ровно одна фальшивая монета, и значит пара фальшивых монет — это пара от $(13,14)$ до $(17,1)$. Наконец, если легче вторая чаша, то пара фальшивых монет — это пара от $(8,9)$ до $(12,13)$. Таким образом, в любом случае, если мы еще не нашли фальшивую пару, то мы имеем задачу поиска фальшивой пары среди шести последовательных монет. Покажем, что это возможно. Пронумеруем заново монеты от 1 до 6. Взвесим на одной чаше монеты 1 и 2, а на второй — монеты 5 и 6. Если весы сломались, то мы нашли фальшивую пару. Если равенство, то фальшивые монеты — это $(3,4)$. Если легче первая чаша, то пара фальшивых монет — это $(2,3)$. Наконец, если легче вторая чаша, то фальшивая пара — это пара $(4,5)$.

40. (5) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из 2012 натуральных чисел, в разложении каждого из которых на простые множители четное число различных простых чисел?

Ответ: да, существует. *Решение.* Выберем 2012 последовательных чисел $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+2012$ так, чтобы у каждого из них был простой делитель, не входящий в разложения остальных (например, построим такие числа по китайской теореме об остатках). Пусть эти простые числа — p_1, p_2, $\ldots$, p_{2012}. Кроме этого, расмотрим еще 2012 простых чисел q_1, q_2, $\ldots$, q_{2012}, которых нет в разложениях выбранных 2012 последовательных чисел. Теперь будем строить число A, на которое потом умножим все выбранные нами числа, чтобы получилась требуемая прогрессия. Заметим, что добавление в число A пары множителей p_kq_k меняет четность количества простых множителей в точности только в числе $n+k$. Строя из таких множителей число A мы добьемся того, чтобы у всех чисел вида $A(n+k)$ было четное число простых множителей в разложении.

41. (6) Узлом назовем точку, обе координаты которой — целые числа. Внутри треугольника ABC с вершинами в узлах распожено ровно $n>0$ узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC?

Решение. Пусть на стороне BC находится m узлов. Тогда они делят сторону на $m+1$ равных отрезков (если бы отрезки были бы не равные, то узлов на стороне BC было бы больше чем m). Обозначим через $\overline{e}=\overline{BC}/(m+1)$, то есть $BC=(m+1)\cdot|\overline{e}|$. Рассмотрим среди узлов внутри треугольника узлы с наименьшим расстоянием до BC. Проведем через них прямую l параллельно BC. Пусть прямая l пересекает AB в точке B', а AC — в точке C'. Ближайший узел к B' среди расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l обозначим через B_1, а ближайший узел к C' среди расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l обозначим через C_1. Тогда $B'B_1\leqslant|\overline{e}|$, $B_1C_1\leqslant(n-1)\cdot|\overline{e}|$ (так как если мы отложим от B_1 вектор $(n-1)\overline{e}$, то мы получим на этом векторе уже n узлов, следовательно, точка C_1 должна лежать внутри или на конце этого вектора) и $C_1C'\leqslant\overline{e}$. Следовательно $B'C'\leqslant(n+1)\cdot|\overline{e}|$. С другой стороны, прямая l должна лежать между средней линией (может совпадать с ней) и стороной BC, так как если она лежит «выше средней линии», то можно отразить A относительно B_1 и получить узел, лежащий внутри треугольника ABC и находящийся ближе к BC. Следовательно $B'C'\geqslant BC/2=(m+1)|\overline{e}|/2$. Совмещая полученные неравенства получаем $(m+1)\cdot|\overline{e}|/2\leqslant B'C'\leqslant(n+1)\cdot|\overline{e}|$. Значит $m\leqslant 2n+1$. Пример для $2n+1$ следующий: $A(0;2)$; $B(0;0)$; $C(2n+2;0)$. На стороне BC ровно $2n+1$ узел, а внутри треугольника ровно n узлов.

42. (6) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH=\sqrt{2}$.

См. решение задачи 36 младшей лиги.

43. (7) В стране n аэропортов, некоторые из них связаны двусторонними беспосадочными авиалиниями. Сеть авиалиний связна: из любого аэропорта можно добраться до любого другого. Оказалось, что не менее чем k аэропортов — узловые: при закрытии любого из них связность сети авиалиний нарушается. При данных n и $k\leqslant n-2$ определите наибольшее возможное число авиалиний в стране.

Ответ: $(n-k)(n-k-1)/2+k$. *Решение.* Пример: между аэропортами с номерами от 1 до $n-k$ есть все авиалинии, кроме того, есть авиалинии между аэропортами $(i,i+1)$ при $n-k\leqslant i\leqslant n-1$. Покажем, что больше авиалиний быть не может. Перейдем на язык графов, тогда узловые аэропорты — это точки сочленения. Нам понадобится понятие дерева блоков и точек сочленения графа. Напомним об этом.

Два ребра графа будем называть *похожими*, если они совпадают или входят в общий простой цикл (с разными вершинами). Ключевой момент состоит в том, что введенное нами отношение похожести есть отношение эквивалентности. Действительно, достаточно доказать транзитивность. Пусть ребра a, b входят в простой цикл Вася, ребра b, c входят в простой цикл Всеволод. Пойдем по Всеволоду от концов ребра c в две стороны, пока не наткнемся на

Васю. Это произойдет не позже, чем мы подойдем к ребру b, так что на Васю мы наткнемся в разных вершинах x_1, x_2. Чтобы получить простой цикл, содержащий ребра a и c, достаточно взять те ребра Всеволода, по которым мы прошли (в том числе c), и добавить ту часть Васи от x_1 до x_2, в которой лежит ребро a. Класс эквивалентности ребер будем называть *блоком.* Легко видеть, что два блока (как графы) могут иметь не более одной общей вершины, и эта вершина есть точка сочленения. Рассмотрим новый граф, вершины которого суть блоки и точки сочленения, и ребро соответствует тому, что точка сочленения принадлежит блоку. Нетрудно видеть, что этот граф есть дерево, и его висячей вершиной может быть только блок. Он называется *крайним блоком* графа.

Перейдем к решению задачи. Индукция по n. Для $n = 2$ утверждение понятно. Так же оно ясно для $k = 0$. Пусть для меньших значений n оценка установлена и $k \geqslant 1$. Рассмотрим крайний блок, пусть он содержит $r + 1$ вершину. Удалим его ребра (и все вершины, кроме точки сочленения) из графа, останется хотя бы $k - 1$ точка сочленения. Поэтому, в частности, $k - 1 \leqslant n - r - 2$ (в связном графе с хотя бы двумя вершинами есть хотя бы две не точки сочленения), $n - r - k \geqslant 1$. Пользуясь индукционным предположением получаем, что количество ребер в графе не превосходит $r(r+1)/2+(n-r-k+1)(n-r-k)/2+k-1$. Максимизируя это выражение по $r \in [1, n-k-1]$ получаем, что максимум достигается при $r = 1$ или $r = n - k + 1$ (это квадратный трехчлен по r с положительным старшим коэффициентом, так что максимум априори достигается в одном из концов отрезка) и равен $(n-k)(n-k-1)/2+k$, что и требовалось.

44. (7) Пусть γ_1 и γ_2 — две окружности, касающиеся в точке T. Через точку T проведены прямые a и b, которые пересекают окружность γ_1 вторично в точках A и B соответственно, а окружность γ_2 — в точках A_1 и B_1 соответственно. Пусть X — произвольная точка плоскости, не лежащая на данных прямых a, b и окружностях γ_1, γ_2. Окружности, описанные вокруг треугольников ATX и BTX, пересекают окружность γ_2 в точках A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые TX, A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в одной точке.

Решение. См. рис. 7. Пусть прямая A_2B_1 вторично пересекает окружность ATX в точке Y. Тогда для направленных углов между прямыми имеем

$$\angle(AX, a) = \angle(AY, AT) = \angle(YA_2, A_2T) = \angle(B_1A_2, A_2T) = \angle(B_1A_1, A_1T) = \angle(B_1A_1, a),$$

то есть прямые AY и A_1B_1 параллельны. Но прямые AB и A_1B_1 параллельны из гомотетичности окружностей с центром в точке T, так что Y лежит на AB. Аналогично, вторая точка Z пересечения прямой A_1B_2 с окружностью BTX лежит на AB. Тогда из параллельности $ABYZ \parallel A_1B_1$ и вписанности четырехугольника $A_2B_1A_1B_2$ получаем

$$\angle(ZY, ZB_2) = \angle(B_1A_1, A_1B_2) = \angle(B_1A_2, A_2B_2) = \angle(A_2Y, A_2B_2),$$

то есть точки A_2, B_2, Y, Z лежат на одной окружности. Но тогда прямые TX, A_1B_2, A_2B_1 суть радикальные оси этой окружности и окружностей ATX, BTX, откуда и следует и утверждение задачи.

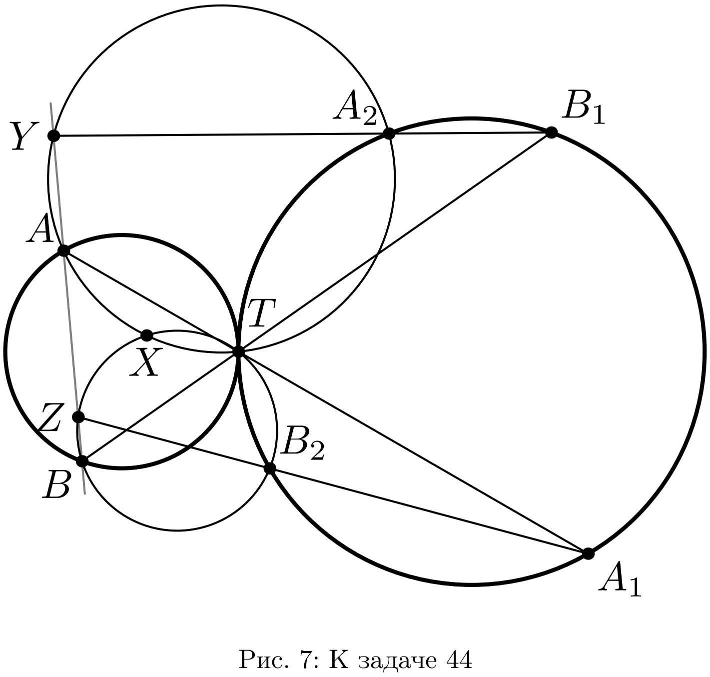

Рис. 7: К задаче 44

45. (8) Положительные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d=1$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\geqslant\frac{1}{15}$$

Решение. Рассмотрим неравенство

$$(\sum_{i=1}^n x_i^3)(\sum_{i=1}^n y_i^3)(\sum_{i=1}^n z_i^3)\geqslant(\sum_{i=1}^n x_iy_iz_i)^3,$$

которое верно для положительных значений переменных. Это неравенство доказывается, например из соображений однородности. Достаточно домножить все иксы на свой коэффициент так, чтобы сумма их кубов стала равна 1, потом то же сделать с игреками и с зетами, а затем оценить слагаемые из левой части по неравенству о средних для трех чисел $x_iy_iz_i\leqslant(x_i^3+y_i^3+z_i^3)/3$. Умножив наше неравенство на множители

$$5=(1+a)+(1+b)+(1+c)+(1+d)=(\sqrt[3]{1+a})^3+(\sqrt[3]{1+b})^3+(\sqrt[3]{1+c})^3+(\sqrt[3]{1+d})^3$$

и на

$$3=(1-a)+(1-b)+(1-c)+(1-d)=(\sqrt[3]{1-a})^3+(\sqrt[3]{1-b})^3+(\sqrt[3]{1-c})^3+(\sqrt[3]{1-d})^3$$

и применив написанное выше неравенство, получаем требуемое.

46. (9) В ряд стоит 2012 блюдечек, пронумерованных от 1 до 2012. На k-ом блюде лежит ровно k орехов. Двое играют в игру. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с m-го блюда на $(m-1)$-ое (где m выбирается от 2 до 2012 на усмотрение игрока), либо забрать с первого блюда любое число (тоже не меньше одного) орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Рассмотрим теорию игры Ним. Пусть имеются кучки с a_1, a_2, …, a_n камнями. За ход разрешается брать из любой кучи любое число камней. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Отметим, что это игра конечна, так как не более чем за $a_1+a_2+\ldots+a_n$ ходов все камни будут взяты. Это означает, что позиции в ней могут быть проанализированы. Изучим структуру выигрышных и проигрышных позиций в этой игре. Для этого введем в рассмотрение операцию $\oplus$. Пусть два числа x и y представлены в двоичной системе счисления и при этом в их записи поровну разрядов (для этого, если нужно в начало меньшего числа напишем нули). Сложим эти числа побитно (без переносов) и результат (также число в двоичной системе) будем обозначать через $x\oplus y$ (это сложение — аналог операции XOR в программировании). Докажем следующую (интересную саму по себе) теорему:

Теорема. Проигрышные позиции в игре Ним, это в точности такие наборы количеств камней в кучах a_1, a_2, …, a_n, что $a_1\oplus a_2\oplus a_3\ldots\oplus a_n=0$.

Докажем, что это так, индукцией по суммарному количеству камней во всех кучах. Вспомним, во-первых, что выигрышные позиции это такие, из которых есть ход в проигрышную позицию, а проигрышные позиции — это такие, из которых любой ход ведет в выигрышную (терминология обусловлена тем, что начинающей с проигрышной позиции проигрывает, а с выигрышной — выигрывавает). Будем доказывать, что описанные в формулировке позиции — это в точности все проигрышные. Заметим, что позиция, в которой во всех кучах ноль камней, проигрышная (из нее нельзя сделать ход) и при этом $\oplus$-сумма как раз равна нулю. Теперь покажем, что любой ход из позиции, в которой сумма $a_1\oplus a_2\oplus\ldots\oplus a_n$ равна 0 ведет в позицию, в которой эта сумма не ноль. Пусть мы взяли k камней из первой кучи. Заметим, что в двоичном разложении числа a_1-k не могут быть единицы на тех же местах, что и в числе a_1, так как иначе бы оно было не меньше исходного. Отсюда мы получаем, что новая позиция выигрышная по предположению индукции. Теперь рассмотрим позицию, в которой сумма $a_1\oplus a_2\oplus\ldots\oplus a_n$ не равна 0. Покажем, что можно сделать ход так, чтобы она стала нулем. Для этого найдем наибольший разряд (двоичного разложения), в котором побитная сумма не ноль. Значит есть кучки, у которых в двоичном представлении в этом разряде тоже единица. Пусть такая кучка — это a_1. Изменим ее следующим образом: обнулим тот (самый большой) разряд, в котором $\oplus$–сумма не ноль и изменим все биты, в которых так же $\oplus$–сумма была не ноль. Новая сумма будет ноль, и, кроме того, ясно, что мы уменьшили кучу a_1. Таким образом, мы доказали по индукции теорему.

Теперь рассмотрим игру Ним с пополнением. Отличие от обычной игры состоит в том, что кучи можно как уменьшать, так и увеличивать. Ясно, что если не вводить никаких ограничений на ходы, увеличивающие кучи, то такая игра не будет конечной. Будем считать, что есть (какое-то любое) ограничение, из которого следует, что число увеличивающих ходов будет конечно. Тогда такая игра совершенно не отличается от рассмотренной, мы просто на все ходы, увеличивающие кучки, будем отвечать уменьшением на то же число, на которое только что увеличил другой игрок. Таким образом, в такой игре проигрышные позиции описываются аналогично. Наконец сведем нашу игру к описанной выше игре Ним с увеличениями. Для этого мы будем рассматривать только блюдца с нечетными номерами, а на блюдца с четными номерами не будем обращать внимание. Заметим, что наша игра конечна (полуинвариантом является, например, сумма номеров блюдец, посчитанная по всем орехам — ясно что такая сумма целая и с каждым ходом уменьшается). Значит в нашей игре будет всего лишь конечно число ходов и тем более лишь конечное число ходов из блюдца с четынми номером в блюдца с нечетными. Такой ход мы будем рассматривать просто как увелечение. Тогда мы просто свели игру к игре Ним на кучках 1, 3, ..., 2011. Посчитаем побитную сумму этих чисел. Их 1006 и все они нечетны, значит в последнем разряде сумма ноль. Вычтем из всех чисел 1 и поделим на 2. Получим числа от 0 до 1005. Их сумма нечетна, и значит у исходных чисел сумма во втором разряде не ноль. Значит эта позиция выигрышная и выиграет первый игрок.

Регата

Младшая лига

Алгебра и теория чисел

47. Вещественные числа x и y таковы, что $x^2+xy+y^2=4$ и $x^4+x^2y^2+y^4=8$. Найдите $x^6+x^3y^3+y^6$.

Ответ: 19. *Решение.* Раскладывая второе равенство на множители (добавляя и вычитая x^2y^2) имеем $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=8$, откуда следует, что $x^2-xy+y^2=2$, откуда $xy=1$ и $x^2+y^2=3$. Тогда $x^6+x^3y^3+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)+(xy)^3=3((x^2+y^2)^2-3(xy)^2)+1=19$.

48. Маша пишет в таблицу числа: в первой строчке она пишет число 1, во второй строчке она пишет числа 2 и 3 (2 оказывается под 1), в третьей строчке 4, 5, 6 (4 под 2) и т. д. до тех пор, пока она не напишет 2012. В каком столбце будет наибольшая сумма?

Ответ: в 10 столбце. *Решение.* Заметим, что $1+2+\ldots+63=\dfrac{63\cdot 64}{2}=2016$. Значит, в таблице будет 63 строки, причем в последней строке не будет хватать чисел 2014, 2015, 2016 до полной таблицы. Будем для простоты полагать, что они присутствуют, как мы увидим, это не повлияет на ответ. Сравним сумму чисел в k-ом и $k+1$-столбце. В $k+1$ столбце ровно $63-k$ чисел, которые на 1 больше стоящих рядом с ними чисел k-ого столбца. Однако в k-ом столбце есть на одно число больше, и это число $\dfrac{k(k+1)}{2}$. Значит, пока $63-k>\dfrac{k(k+1)}{2}$ сумма чисел в столбце будет возрастать. Первый раз это неравенство будет нарушаться при $k=10$ и значит сумма в десятом столбце будет самой большой. Добавленные в начале числа, как мы видим, не повлияли на результат.

49. Вася расставил по кругу числа от 1 до 10 в произвольном порядке и посчитал все суммы трех подряд стоящих чисел. Какое наибольшее значение может принимать наименьшая из этих сумм?

Решение. Заметим, что сумма всех 10 троек подряд стоящих чисел — это утроенная сумма всех чисел, то есть 165. Значит средняя сумма в каждой тройке — это $165/10=16{,}5$. Покажем, что сделать, чтобы минимальная сумма была 16 тоже невозможно. Так как среднее значение суммы 16,5 — это означает, что тройки суммарно могут превысить сумму 16 всего на 5. Но заметим, что соседние тройки (которые имеют два общих числа) не могут иметь равные суммы (иначе бы первое число первой тройки равнялось бы последнему числу соседней тройки). Но тогда единственным вариантом было бы чередование троек с суммой 16 и 17, что привело бы к тому, что числа через два отличаются на один, но тогда числа через 5 получаются равными. Для суммы пятнадцать имеется пример: 1, 8, 7, 5, 3, 10, 2, 4, 9, 6 по кругу.

50. Найдите все такие натуральные m, что $\{\sqrt{m}\}=\{\sqrt{m+2011}\}$.

Ответ: 1005^2. *Решение.* Перепишем уравнение в виде $\sqrt{m}-[\sqrt{m}]=\sqrt{m+2011}-[\sqrt{m+2011}]$, откуда $\sqrt{m+2011}-\sqrt{m}=[\sqrt{m+2011}]-[\sqrt{m}]=p\in\mathbb{N}$. Возводя равенство $\sqrt{m+2011}=\sqrt{m}+p$ в квадрат, имеем $2011=p^2+2p\sqrt{m}$. Отсюда ясно, что число $\sqrt{m}$ рациональное, а, значит, целое. Пусть тогда $k=\sqrt{m}$, откуда $2011=p(p+2k)$. Так как 2011 — простое, получаем, что $p=1$, а $k=1005$. Значит $m=k^2=1005^2$.

Геометрия

51. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись точки X и Y соответственно такие, что $\angle BYX = \angle AYC$ и $\dfrac{BY}{YC} = 2 \cdot \dfrac{BX}{XA}$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Решение. Отразим симметрично точку Y относительно точки C в точку Y' (см. рис. 8). Тогда, так как отрезок YY' в два раза больше отрезка YC будет выполнено равенство $\dfrac{BY}{YY'} = \dfrac{BX}{XA}$, а следовательно, по теореме Фалеса $XY \parallel AY'$. Значит, $\angle AYY' = \angle XYB = \angle AY'Y$. Следовательно, треугольник AYY' равнобедренный. Следовательно, проведённая в нём медиана AC является и высотой, что означает, что угол C прямой, ч. т. д.

52. На боковой стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AB \perp BC$) построена полуокружность (как на диаметре), которая касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка OK, если длины оснований трапеции $ABCD$ равны 2 и 3.

Ответ: $OK = 6/5$. *Решение.* Заметим, что $CK = BC = 2$ и $DA = DK = 3$ по свойствам касательных, проведённых к окружности (см. рис. 9). Так как треугольники BCO и DAO подобны по двум углам ($\angle CBO = \angle ADO$ как накрест лежащий), то $BO/OD = BC/AD = 2/3$. По доказанному $CK/KD = 2/3$. Значит, по теореме Фалеса $BC \parallel OK$. Значит, треугольники DOK и DBC подобны и по свойству подобия треугольников имеем $OK/BC = DK/DC = 3/5$, откуда имеем $OK = 6/5$.

53. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD оказалось, что $AD = DC = CB < AB$. Точки E и F на сторонах CD и BC соответственно таковы, что $\angle ADE = \angle AEF$. Докажите, что $4CF \leqslant BC$.

Решение. Так как трапеция равнобокая, то $\angle C = \angle D$. Заметим, что $\angle CEF + \angle FEA + \angle AED = 180°$, а также $\angle EDA + \angle DAE + \angle AED = 180°$. Вычитая одно равенство из другово получаем $\angle CEF = \angle DAE$ (см. рис. 10). Следовательно, треугольники CEF и DAE подобны. Обозначим длину отрезка CE через x, а ED — через y. Тогда из свойств подобных треугольников $CF/CE = ED/DA$. То есть $CF = \dfrac{ED \cdot CE}{DA} = \dfrac{x \cdot y}{x+y}$ (мы воспользовались тем, что $DA = CD = x+y$). Утверждение задачи равносильно неравенству $4 \leqslant CB/CF = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$. Для доказательства этого неравенства проведём следующую цепочку равносильных преобразований: $4 \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{xy} \Leftrightarrow 4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geqslant 0$.

54. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AC$ и $BC = CD$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка X — середина дуги CD, не содержащей точку A. Докажите, что $XO \perp AB$.

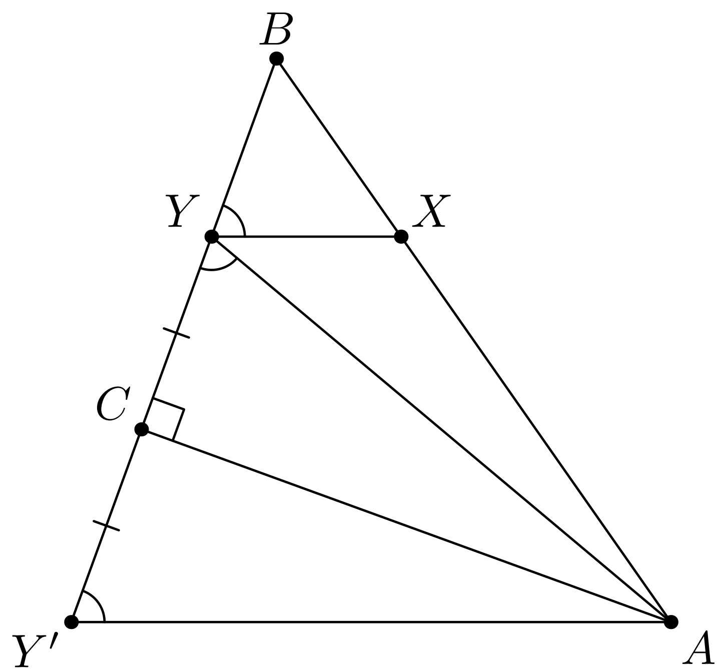

Рис. 8: К задаче 51

Решение. Докажем, что O — точка пересечения высот треугольника ABX (см. рис. 11). Для этого достаточно доказать, что O лежит на высотах, проведённых из вершин A и B. Обозначим половину угла CAB через α. Тогда $\angle CAB = \angle CDB = \angle DBC = \angle DAC = 2\alpha$ как углы опирающиеся на одну и ту же дугу, а $\angle BCA = \angle CBA = 90° - \alpha$ так как треугольник ABC равнобедренный. Из определения точки X следует, что $\angle DBX = \angle XBC = \angle XAC = \angle DAX = \alpha$. Так как $\angle ACB + \angle XBC = 90° - \alpha + \alpha = 90°$ и $\angle ADB + \angle DAX = \angle ACB + \angle DAX = 90° - \alpha + \alpha = 90°$, то углы между парами хорд AC, BX и BD, AX прямые. Из того, что O — точка пересечения высот треугольника ABX следуюет, что XO — высота, ч. т. д.

Комбинаторика

55. Три грани куба $8 \times 8 \times 8$ покрашены в синий цвет, а три другие грани — в красный цвет так, что ни в какой вершине не сходятся три грани одного цвета. Сколько кубиков из этого большого куба имеют как синюю, так и красную грань?

Решение. Заметим, что требуемые кубики присутствуют в точности вдоль восьми ребер. Тогда из количество равно 56.

56. Олимпиада по математике проводится в два дня, каждый день предлагается одинаковое число задач, пронумерованных от 1 до N. Оказалось, что у каждого школьника количества решенных им задач в первый и второй день

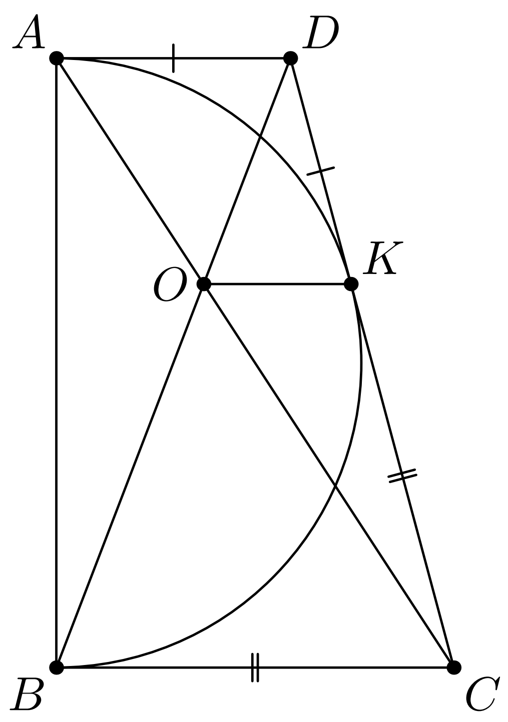

Рис. 9: К задаче 52

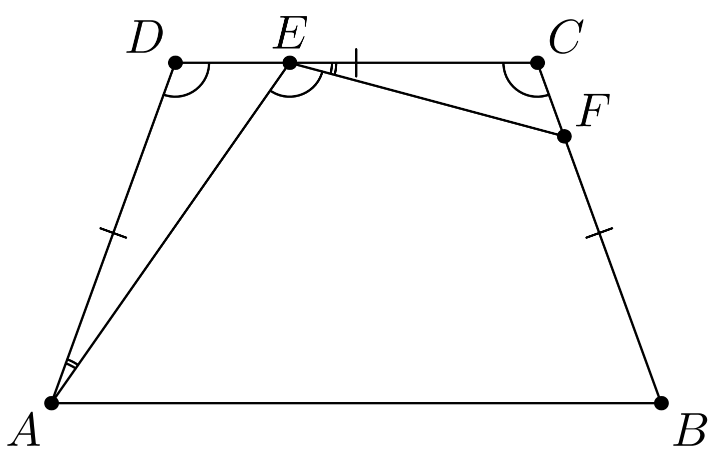

Рис. 10: К задаче 53

отличаются на 1. При этом для каждого номера от 1 до N число школьников, решивших задачи с этим номером в разные дни, отличается на 2. Докажите, что в олимпиаде участвовало четное число школьников.

Решение. Посчитаем число задач, решенных всеми участниками. Заметим, что для каждого участника число решенных им за два дня задач нечетно (так как равно $k+(k+1)$). Однако, каждую пару задач с одинаковыми номера решили четное число школьников ($m+(m+2)$). Это означает, что общее число задач, решенное всеми школьниками четно, откуда следует, что и число участников турнира тоже четно — ведь каждый вкладывает в общую сумму нечетное число задач.

57. В футбольном турнире принимали участие 30 команд. По окончании турнира оказалось, что среди любых трех команд найдутся две, которые в трех матчах внутри этой тройки команд набрали поровну очков (за победу дается 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0). Какое минимальное количество ничьих может быть в таком турнире?

Решение. Выберем произвольную команду A и разобьем все команды на три группы: команды, выигравшие у A, команды, проигравшие A, и команды, сыгравшие с A вничью. К последней группе мы добавим и команду A. Заметим, что любые две команды и одной группы сыграли вничью — это легко следует из условия. Пусть в группах a, b и c команд. Тогда число ничьих не меньше, чем

$$\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{c(c-1)}{2}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-30).$$

Сумма чисел a, b и c равна 30, поэтому сумма квадратов минимальна, если все числа равны. Отсюда следует, что ничьих не меньше, чем 135. Пример получается, когда описанные группы действительно содержат ровно по 10 команд и команды групп выигрывают друг у друга по циклу.

58. Имеется множество из 2012 чисел, не все из которых целые. Какое наибольшее количество подмножеств этого множества могут иметь целую сумму (пустое множество не учитывается).

Ответ: $2^{2011}-1$. *Решение.* Пример: все числа на карточках, кроме одного - целые.
Оценка: Зафиксируем нецелое число K и разобьем все наборы на пары, отличающиеся только наличием карточки K. Получится $2^{2011}-1$ пара, и отдельный набор из одного числа K. В каждой паре не более одного набора с целой суммой — если один целый, то второй (плюс-минус число на K) — уже нет.

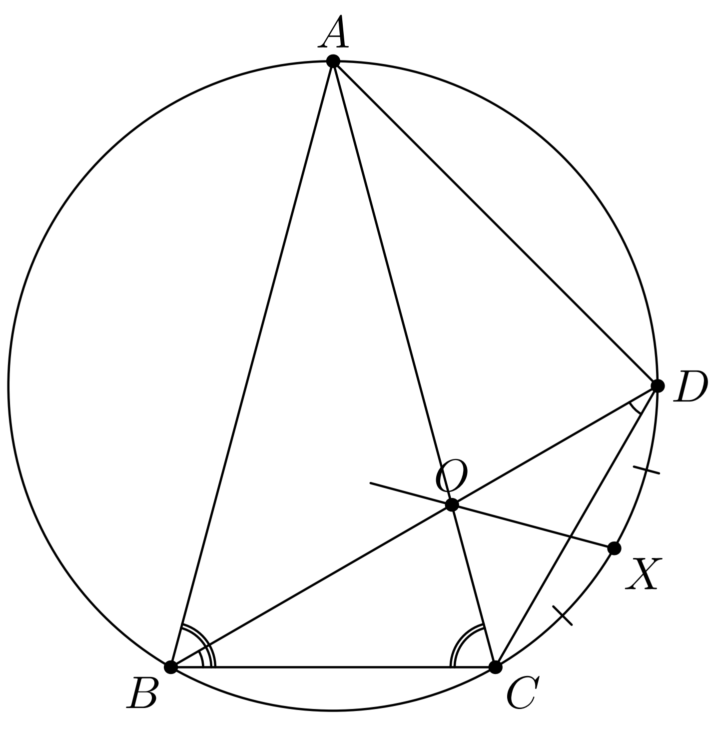

Рис. 11: К задаче 54

Старшая лига

Алгебра и теория чисел

59. Решите в целых числах уравнение $x - y = x^2 + xy + y^2$.

Решение. Перепишем это как квадратное уравнение, относительно x: $x^2 + (y-1)x + y^2 + y = 0$. Дискриминант равен $1 - 3y(y+2)$. Ясно, что при $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -3$ это число отрицательно, то есть решений нет. При $y = 0$ получаем $x = 0$ или $x = 1$. При $y = -1$ получаем $x = 0$ или $x = 2$. Наконец, при $y = -2$ получаем $x = 1$ или $x = 2$. Таким образом, ответом является шесть пар: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(2,-1)$, $(1,-2)$ и $(2,-2)$.

60. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Решение. Изучим все числа, которые обладают таким свойством. Обозначим рассматриваемое нами число с данным свойством через N. Если такое число четное, то его остаток от деления на 4 — это 2. Тогда остаток от деления на 6 — это 4, …, остаток от деления на 10 — это 8. Тогда остаток от деления на 3 — это 1, от деления на 5 — это 3, и т. д. Таким образом, если N четное, то $N + 2$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2, 3, \ldots, 10] - 2$. Теперь пусть N нечетно. Аналогично получаем, что N дает остаток 3 от деления на 4, остаток 5 от деления на 6 и т. д. Далее N дает остаток 2 от деления на 3 (так как N дает остаток 5 от деления на 6) и остаток 4 от деления на 5. Остаток от деления на 9 может быть равен только 8 (так как N не делится на 3 и нечетные остатки заняты), а для остатка от деления на 7 остаются 2 варианта: 0 и 6. В первом случае $N + 1$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2, 3, \ldots, 10] - 1$. Во втором получаем, что $N + 1$ кратно $[2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10] = 360$ и дает остаток 1 от деления на 7. Наименьшее такое число — это 1800, и значит $N = 1799$ будет ответом.

61. Функция $f(x)$ такова, что $f(1) = 0$, $f(2n) = f(n) + 1$ и $f(2n+1) = f(2n) - 1$ при $n \in \mathbb{N}$. Найдите сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(127)$.

Ответ: 321. *Решение.* Легко понять, рассуждая по индукции, что $f(n)$ — это количество нулей в двоичной записи числа. Действительно, условие $f(1) = 0$ — это база, а переход от n к $2n$ и от $2n$ к $2n+1$ осуществляется с помощью данных соотношений. Заметим также, что $127 = 1111111_2$, то мы суммируем значения f для всех не более чем семизначных (в двоичной записи) чисел. Посчитаем, сколько раз встретися ноль на k-ом месте. На местах с $k+1$ до 7 возможны все варианты (их 2^{7-k}) на местах с первого по $k-1$ возможны все варианты, кроме одного (все нули), их $2^{k-1} - 1$. На первом месте ноль невозможен, значит надо просуммировать слагаемые вида $(2^{k-1} - 1)2^{7-k}$ по всем k от 2 до 7. Получается 321.

62. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1} + 1}$ для $n > 1$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$.

Ответ: $\dfrac{2012}{2013}$. *Решение.* Введем в рассмотрение последовательность $b_n = \dfrac{1}{a_n}$. Для нее рекуррентное соотношение переписывается в виде $b_n = b_{n-1} + 2n$. Значит $b_n = 2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$, откуда $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Складывая такие число по всем n от 1 до 2012 получаем, что сумма равна $\dfrac{2012}{2013}$.

Геометрия

63. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L и M. Оказалось, что радиусы описанных окружностей треугольников AKM, BKL, CLM и KLM равны. Докажите, что треугольники ABC и KLM подобны.

Решение. См. рис. 12. Пусть R — указанный радиус. По теореме синусов $KL = 2R \sin \angle B = 2R \sin \angle KML$. Отсюда $\angle KML = \angle B$ или $\angle KML = 180^\circ - \angle B$ (дополнителен к $\angle B$). Аналогично, $\angle KLM = \angle A$ или $\angle KLM = 180^\circ - \angle A$, $\angle LKM = \angle C$ или $\angle LKM = 180^\circ - \angle C$. Если дополнительных углов нет, то углы равны и треугольники подобны. Если дополнительный — один, скажем, $180^\circ - \angle A$, то, суммируя углы треугольников ABC и KLM, получим $\angle A = 180^\circ - \angle A$ — опять все углы равны. Если дополнительных два, то получим, например, $\angle B + \angle C = 360^\circ - \angle B - \angle C$, откуда $\angle B + \angle C = 180^\circ$, что невозможно. При трех дополнительных углах $\angle A + \angle B + \angle C = 540^\circ - \angle A - \angle B - \angle C$, противоречие.

64. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка X и через нее проведены отрезки PQ и EF, параллельные сторонам квадрата AD и AB соответственно, с концами, лежащими на сторонах квадрата (P на AB, F на AD). Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

Ответ: 45°. *Решение.* См. рис. 13. Обозначим сторону квадрата через a, а длины отрезков AF и AP через x и y соответственно. Тогда длины отрезокв EC и CQ равны $a-x$ и $a-y$ соответственно. Условие на площади можно переформулировать так: $EC \cdot CQ = AF \cdot AP$ или $(a-x)(a-y) = 2xy$. Запишем тангенсы углов BAE и QAD: $\operatorname{tg}\angle BAE = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{x}{a}$, $\operatorname{tg}\angle QAD = \dfrac{DQ}{AD} = \dfrac{y}{a}$. Теперь найдём тангенс суммы этих углов: $\operatorname{tg}(\angle EAB + \angle QAD) = \dfrac{\operatorname{tg}\angle EAB + \operatorname{tg}\angle QAD}{1 - \operatorname{tg}\angle EAB \cdot \operatorname{tg}\angle QAD} = \dfrac{x/a + y/a}{1 - x/a \cdot y/a} = \dfrac{a(x+y)}{a^2 - xy}$. Но из уравнения на площади имеем $2xy = (a-x)(a-y) = a^2 - a(x+y) + xy \Leftrightarrow a(x+y) = a^2 - xy$. То есть $\operatorname{tg}(\angle EAB + \angle QAD) = 1$. А значит, так как сумма этих углов очевидно меньше 90° их сумма равна 45°. Значит, угол $\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE - \angle QAD = 90^\circ - (\angle BAE + \angle QAD) = 45^\circ$.

65. В тетраэдре $SABC$ радиусы описанных окружностей граней SAB, SBC и SAC равны 108. Радиус вписанной сферы этого тетраэдра равен 35, а расстояние от вершины S до ее центра равно 125. Чему равен радиус описанной сферы этого тетраэдра?

Ответ: 112,5. *Решение.* Обозначим центр описанной сферы через O, а вписанной через I. Опустим перпендикуляры из O на грани тетраэдра. Тогда их основаниями будут являться центры описанных окружностей этих граней. Обозначим центр описанной окружности треугольника SBC через O_A. Тогда так как $O_AO \perp SBC$, то по теореме Пифагора имеем $SO^2 = SO_A^2 + O_AO^2$. Значит, $O_AO = \sqrt{SO^2 - SO_A^2}$. Аналогично для других центров. Значит, O равноудалена от граней SAB, SBC и SAC. То есть существует сфера с центром в O и касающаяся плоскостей SAB, SBC и SCA. Но тогда эта сфера гомотетична вписанной сфере тетраэдра с центром в точке S. Следовательно, что треугольник SOO_A подобен треугольнику SII_A, где I_A — точка касания вписанной сферы с гранью SBC. Находим из подобия $SO = SO_A \cdot SI/SI_A = \dfrac{108 \cdot 125}{\sqrt{125^2 - 35^2}} = \dfrac{27 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25}{5 \cdot 8 \cdot 3} = 112,5$.

66. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Оказалось, что $\angle KLA = \angle LAM = \angle AMN = 45^\circ$. Докажите, что $KL^2 + AM^2 = LA^2 + MN^2$.

Решение. См. рис. 14. Заметим, что требуемое равенство эквивалентно $AM^2 - MN^2 = LA^2 - LK^2$, что, в свою очередь, можно расписать по теореме Пифагора: $AD^2 + DM^2 - (DN^2 + DM^2) = AB^2 + BL^2 - (KB^2 + BL^2) \Leftrightarrow AD^2 - DN^2 = AB^2 - KB^2 \Leftrightarrow DN = KB$. Теперь будем доказывать именно это равенство. Сделаем поворот с центром в точке A на 90° так, чтобы точка B перешла в D. Тогда, так как прямая AB перейдёт в прямую AD, наша цель — доказать, то K перешла в N. Обозначим образ точки L через L', а точки K — через K'. Поскольку L лежала на

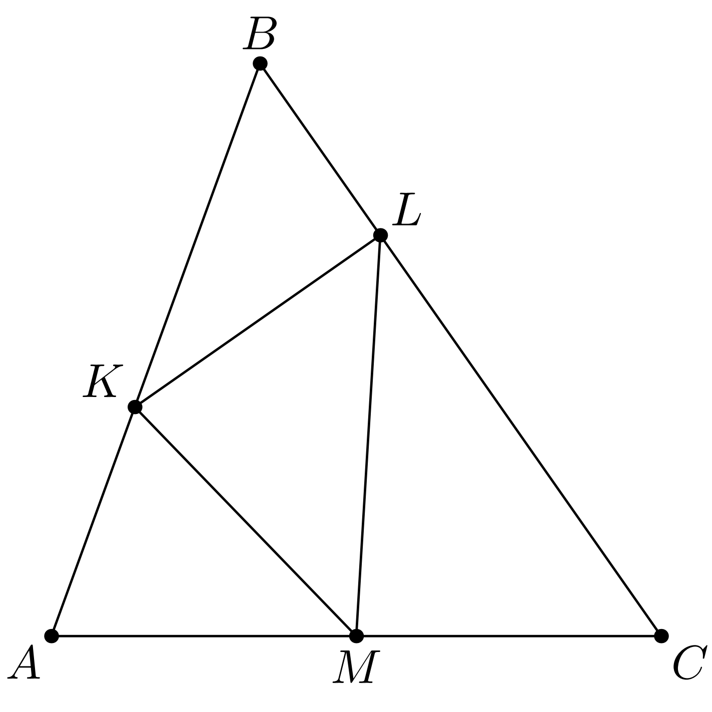

Рис. 12: К задаче 63

BC, то теперь L' лежит на DC. Так как $\angle NMA = \angle MAL$, то $AL \parallel NM$. Аналогично $KL \parallel AM$. Значит, после поворота имеем $AL' \perp NM$, $K'L' \perp AM$ и $AK' \perp L'M$. То есть K' есть точка пересечения высот треугольника $AL'M$. Следовательно, K' лежит на AD и на MN. То есть $K' = N$, что и требовалось.

Комбинаторика

67. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы белые не били никого (ни белых, ни черных) по вертикали, а черные — по горизонтали?

Ответ: 14 ладей. *Решение.* Пример: запретим занимать левую нижнюю клетку, и поставим 7 черных ладей на все остальные клетки левой вертикали и 7 белых ладей на все остальные клетки нижней горизонтали. Если есть не менее 15 ладей, то можно выбрать 8 ладей одного цвета, скажем белых. Либо они занимают все вертикали, и тогда

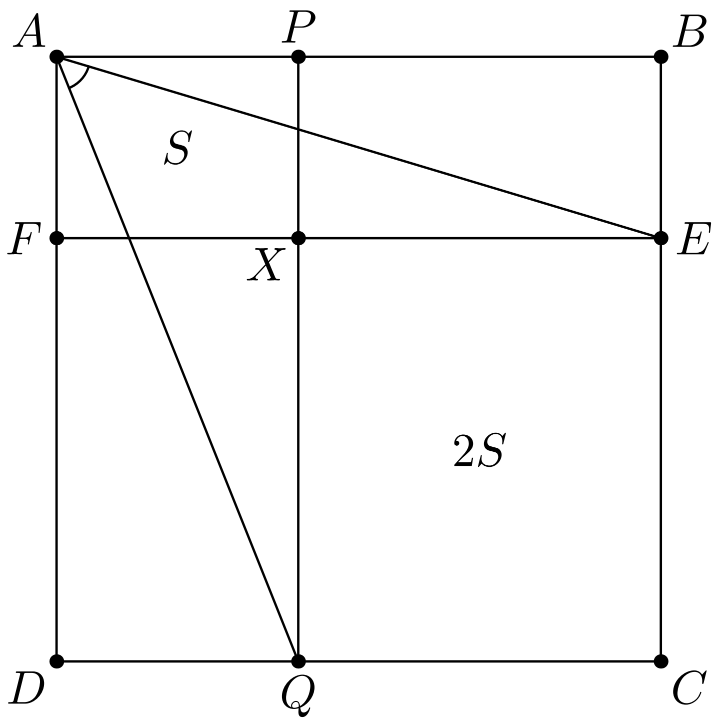

Рис. 13: К задаче 64

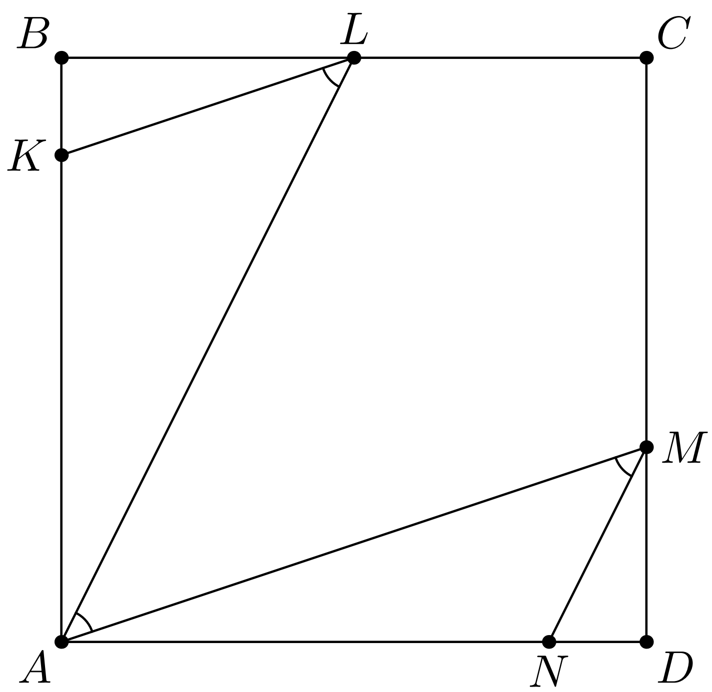

Рис. 14: К задаче 66

больше ладей нет, либо две стоят на одной вертикали и кого-то бьют.

68. Имеется 2012 палочек с длинами от 1 до 2012. Будем называть тройку палочек *хорошей*, если из них можно составить треугольник и *плохой* в противном случае. Каких троек больше — хороших или плохих?

Ответ: Больше плохих наборов. *Решение.* Сопоставим набору (a, b, c), где $a < b < c$, набор $(c-b, c-a, c)$. Набор, где $a + b = c$, перейдет в себя. Остальные наборы разобьются на пары переходящих друг в друга. При этом если набор (a, b, c) — хороший, то он перейдёт в плохой. Действительно, $a+b-c > 0$, поэтому $(c-b)+(c-a) = c-(a+b-c) < c$. Итак, все одиночки и по одному набору из каждой пары — плохие, поэтому плохих наборов больше.

69. На некоторых полях доски 100×100 стоят столбики из шашек. За один ход разрешается переставить любой столбик на столько клеток по вертикали или горизонтали, сколько в нем шашек; если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Вначале на каждой клетке стоит по одной шашке. Можно ли за 9999 ходов собрать их все на одной клетке?

Решение: Нельзя. Допустим противное: удалось собрать все шашки на клетке K. Рассмотрим все ходы на клетку K. Каждым ходом число свободных клеток должно увеличиваться на 1, поэтому освободившаяся клетка больше не занимается. Следовательно, на K сделано не более 198 ходов — из клеток, находящихся с K на одной вертикали или горизонтали. Сумма расстояний от K до этих клеток не превосходит $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 99) = 9900$, поэтому на ней может собраться не более 9901 шашек.

70. Сколькими способами куб $n \times n \times n$ можно разрезать на бруски $1 \times 1 \times n$?

Ответ: $3(2^n - 1)$. *Решение.* Длинные стороны брусков параллельны ребрам куба, таких направлений — три. Допустим, в разбиении нашлись три бруска B_1, B_2, B_3 трех разных направлений. Проведем через B_1 слой $1 \times n \times n$ параллельно B_2, через B_2 — слой параллельно B_3, через B_3 — параллельно B_1. Слои не параллельны, поэтому пересекутся по какому-то кубику K (см. рис). K не принадлежит ни одному из брусков, так как каждый брусок не лежит в одном из слоев. Однако видно, что какое бы направление ни было у проходящего через K бруска, он пересечется с одним из B_1, B_2, B_3. Противоречие. Значит, для любого разбиения есть бруски не более чем двух направлений, и куб можно разбить на параллельные им слои. При подсчете числа разбиений будем сначала выбирать направление слоев (тут есть 3 способа), а затем — направление брусков в каждом слое (2 способа). Итого получим $3 \cdot 2^n$ разбиений. Однако три разбиения — те, где все бруски параллельны друг другу — сосчитаны по 2 раза, их надо вычесть.