Уторак, 10.07.2012.

1. задатак У троуглу ABC тачка J је центар споља приписане кружнице наспрам темена A. Ова кружница додирује страницу BC у M, а продужетке страница AB и AC у K и L, редом. Праве LM и BJ се секу у F, а праве KM и CJ се секу у G. Нека је S пресечна тачка правих AF и BC, а нека је T пресечна тачка правих AG и BC.

Доказати да је M средиште дужи ST.

(*Споља приписана кружница* троугла ABC наспрам темена A је кружница која додирује страницу BC и продужетке страница AB и AC.)

2. задатак Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $a_2, a_3, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви за које је $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Доказати да важи

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)^n \ > \ n^n.$$

3. задатак *Погађалица* је игра коју играју два играча, A и B. Правила игре зависе од природних бројева k и n који су познати и једном и другом играчу.

На почетку игре A бира природне бројеве x и N, такве да је $1 \leqslant x \leqslant N$. Играч A не саопштава информацију о броју x, а саопштава тачну вредност броја N играчу B. Играч B покушава да добије информације о броју x питајући играча A питања следећег облика: у сваком питању B бира произвољан подскуп S скупа природних бројева (може бирати исти подскуп више пута) и пита играча A да ли x припада S. Играч B може поставити питања колико жели. Након сваког питања играч A одмах одговара са *да* или *не*, међутим може да лаже; једино ограничење је да међу произвољних $k+1$ узастопних одговора макар један мора бити истинит.

Након што B постави питања колико жели, он мора одабрати скуп X који се састоји од највише n природних бројева. Ако x припада X онда B побеђује; иначе, B губи. Доказати да:

1. Ако је $n \geqslant 2^k$, онда B може гарантовати победу.
2. За свако довољно велико k, постоји природан број $n \geqslant 1{,}99^k$ такав да B не може гарантовати победу.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Среда, 11.07.2012.

4. задатак Одредити све функције $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да, за све целе a, b, c за које је $a+b+c=0$, важи једнакост:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Скуп $\mathbb{Z}$ је скуп целих бројева.)

5. задатак Нека је ABC троугао у коме је $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ и нека је D подножје висине из темена C. Нека је X тачка која припада унутрашњости дужи CD. Нека је K тачка дужи AX таква да је $BK = BC$. Аналогно, нека је L тачка дужи BX таква да је $AL = AC$. Нека је M пресечна тачка правих AL и BK.

Доказати да је $MK = ML$.

6. задатак Одредити све природне бројеве n за које постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тако да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена