Додатно изборно такмичење за ММО

Београд, 16.05.2012.

1. Нека је $P(x)$ полином степена 2012 са реалним коефицијентима, такав да за све реалне бројеве a, b, c за које је $a+b+c=0$ важи

$$P(a)^3+P(b)^3+P(c)^3 \geqslant 3P(a)P(b)P(c).$$

Може ли полином $P(x)$ имати тачно 2012 различитих реалних нула?

(Милош Милосављевић)

2. Означимо са $\sigma(x)$ збир делилаца природног броја x, укључујући 1 и x. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $f(n)$ број природних бројева m, $m \leqslant n$, за које је $\sigma(m)$ непаран број. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да $f(n) \mid n$. *(Бојан Башић)*

3. Тачке P и Q унутар троугла ABC су такве да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB$ и $\sphericalangle PBC = \sphericalangle QBA$.

а) Доказати да подножја нормала из P и Q на странице троугла леже на једном кругу.

б) Нека су D и E подножја нормала из P на праве BC и AC, а F подножје нормале из Q на AB. Праве DE и AB се секу у тачки M. Доказати да је MP нормално на CF. *(Душан Ђукић)*

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Из идентитета $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$ следи да је $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$ ако и само ако је $x+y+z\geqslant 0$ или $x=y=z$. Према томе, услов задатка је еквивалентан са

$$P(a)+P(b)+P(c)\geqslant 0 \quad \text{кад год је} \quad a+b+c=0. \qquad (*)$$

Докажимо да полином $$P(x)=\prod_{k=0}^{2011}\left(x-1-\frac{k}{4022}\right),$$
који има 2012 реалних нула, задовољава услов $(*)$.

- За $x\leqslant 1$ или $x\geqslant\frac{3}{2}$ је $P(x)\geqslant 0$; штавише, за $x\leqslant 0$ је $P(x)>1$.
- За $1<x<\frac{3}{2}$ важи $\left|x-1-\frac{k}{4022}\right|<\frac{1}{2}$ за $0\leqslant k\leqslant 2011$, те је $P(x)>-\frac{1}{2^{2012}}$.

Ако је $a+b+c=0$, бар један од бројева a,b,c, рецимо a, није позитиван, те је $P(a)>1$ и одатле $P(a)+P(b)+P(c)>1-\frac{1}{2^{2012}}-\frac{1}{2^{2012}}>0$.

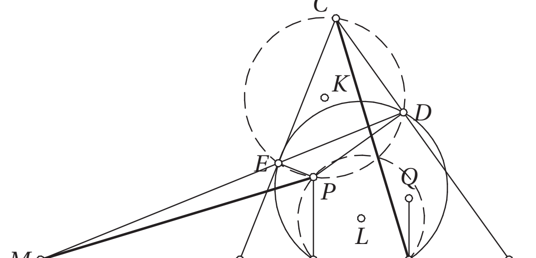
2. Познато је да, ако је $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ факторизација броја n на просте чиниоце, онда је $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+p_i+\cdots+p_i^{r_i})$. Чинилац $1+p_i+\cdots+p_i^{r_i}$ је непаран ако и само ако је r_i парно или $p_i=2$. Према томе, $\sigma(n)$ је непарно ако и само ако је n или $n/2$ квадрат природног броја, што даје

$$f(n)=[\sqrt{n}]+[\sqrt{n/2}].$$

Покажимо да за свако $k\in\mathbb{N}$ постоји број $n_k\in\mathbb{N}$ такав да је $n_k=k\cdot f(n_k)$, па важи $f(n_k)\mid n_k$. Како је $n/f(n)>\frac{1}{2}\sqrt{n}$, постоји најмањи број $n\in\mathbb{N}$ за који је $n\geqslant kf(n)$. Тада је $n-1<kf(n-1)\leqslant kf(n)\leqslant n$, па мора бити $kf(n)=n$.

3. Услов задатка значи да су тачке P и Q изогонално спрегнуте у односу на $\triangle ABC$, па важи и $\sphericalangle PCA=\sphericalangle QCB$.

Означимо са G, H и I редом подножја нормала из P на AB и из Q на BC и AC. Из $\sphericalangle AEG=\sphericalangle APG=90^\circ-\sphericalangle PAB=90^\circ-\sphericalangle QAC=\sphericalangle AQI=\sphericalangle AFI$ следи да тачке E, F, G и I леже на истом кругу k. Центар тог круга је пресек симетрала дужи FG и EI, а то је средиште U дужи PQ. Аналогно, тачке D, H, F и G су једнако удаљене од тачке U. Следи да свих шест тачака D,E,F,G,H,I леже на кругу k са центром U.



Нека су K и L центри кругова $CDPE$ и PFG. Како је $MD\cdot ME=MF\cdot MG$, права MP је радикална оса ова два круга, и зато је нормална на праву KL која спаја њихове центре. Како су K и L средишта дужи PC и PF, праве KL и CF су паралелне, одакле следи $MP\perp CF$.