Додатно изборно такмичење за ММО

Београд, 16.05.2012.

1. Нека је $P(x)$ полином степена 2012 са реалним коефицијентима, такав да за све реалне бројеве a, b, c за које је $a + b + c = 0$ важи

$$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geqslant 3P(a)P(b)P(c).$$

Може ли полином $P(x)$ имати тачно 2012 различитих реалних нула?

2. Означимо са $\sigma(x)$ збир делилаца природног броја x, укључујући 1 и x. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $f(n)$ број природних бројева m, $m \leqslant n$, за које је $\sigma(m)$ непаран број. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да $f(n) \mid n$.

3. Тачке P и Q унутар троугла ABC су такве да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB$ и $\sphericalangle PBC = \sphericalangle QBA$.

а) Доказати да подножја нормала из P и Q на странице троугла леже на једном кругу.

б) Нека су D и E подножја нормала из P на праве BC и AC, а F подножје нормале из Q на AB. Праве DE и AB се секу у тачки M. Доказати да је MP нормално на CF.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.