

The 6th International Mathematical Arhimede Competition

Букурешт, Румунија, 19. 06. 2012.

ПРВИ ДАН

Задатак 1. Нека су a_1, a_2, \dots, a_n произвољних n различитих целих бројева и $(b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$ две њихове пермутације, различите од идентичке. Доказати да је

$$(|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|, |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + \dots + |a_n - c_n|) \geq 2,$$

где (x, y) означава највећи заједнички делилац бројева x и y .

Задатак 2. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама B и C , при чему је BC пречник кружнице k_1 . Тангента кружнице k_1 у тачки C сече по други пут k_2 у тачки A . Означимо пресечну тачку праве AB и кружнице k_1 , различиту од B , са E , а пресечну тачку праве CE и кружнице k_2 , различиту од C , са F . Произвољна права кроз E сече дуж AF у тачки H и кружницу k_1 по други пут у тачки G . Ако се праве BG и AC секу у тачки D , доказати да је $CH \parallel DF$.

Задатак 3. Одредити све функције $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ такве да за све $x, y \in \mathbb{Q}^+$ важи

$$y = \frac{1}{2} \left[f \left(x + \frac{y}{x} \right) - \left(f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} \right) \right].$$

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

The 6th International Mathematical Arhimede Competition

Букурешт, Румунија, 20. 06. 2012.

ДРУГИ ДАН

Задатак 4. Решити следеће једначине у скупу природних бројева:

а) $(5 + 11\sqrt{2})^p = (11 + 5\sqrt{2})^q$;

б) $1005^x + 2011^y = 1006^z$.

Задатак 5. На кружности обима $6n$ обојено је $3n$ тачака које деле кружницу на $3n$ лукова, од којих n има дужину 1, n дужину 2 и преосталих n дужину 3. Доказати да постоје две обојене тачке које леже на истом пречнику кружнице.

Задатак 6. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви који задовољавају услов $a + b + c = 1$. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{a^{-3} + b}{1 - a} + \frac{b^{-3} + c}{1 - b} + \frac{c^{-3} + a}{1 - c} \geq 123.$$

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.