Language: **Serbian**

Day: **1**

Четвртак, 12. април 2012.

Задатак 1. Нека је O центар описаног круга троугла ABC. Тачке D, E и F су унутрашње тачке страница BC, CA и AB, респективно, такве да је права DE ортогонална на праву CO и права DF ортогонална на праву BO.

Ако је K центар описаног круга троула AFE, доказати да су праве DK и BC ортогоналне.

Задатак 2. Дат је природан број n. Одредити највећи природан број m (у зависности од n) са следећим својством: таблица са m врста и n колона се може попунити реалним бројевима на тај начин да за сваке две разне врсте $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ и $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ те таблице важи да је

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Задатак 3. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f\big(yf(x+y) + f(x)\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Задатак 4. За скуп A целих бројева казаћемо да је *пун збирова* ако важи $A \subseteq A + A$, тј. сваки елемент $a \in A$ је збир нека два (не обавезно различита) елемента $b, c \in A$. За скуп A целих бројева казаћемо да је *без збира нула* ако је 0 једини цео број који се не може изразити као збир елемената неког коначног непразног подскупа од A.

Да ли постоји скуп целих бројева који је истовремено пун збирова и без збира нула?

Language: **Serbian**

Day: **2**

Петак, 13. април 2012.

Задатак 5. Прости бројеви p и q задовољавају услов

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

за неки природан број n. Одредити све могуће вредности разлике $q-p$.

Задатак 6. Друштвена мрежа *Mugbook* има бесконачно много корисника. Неки парови (различитих) корисника регистровани су као *пријатељи*, при чему сваки корисник има коначно много пријатеља и сваки корисник има бар једног пријатеља. (*Пријатељство је симетрично, тј. ако је A пријатељ од B, онда је B пријатељ од A.*)

Сваки корисник мора да означи једног од својих пријатеља као свог *најбољег пријатеља*. Ако A означи B као свог најбољег пријатеља, није обавезно да B означи A као свог најбољег пријатеља. За особу која је од неког корисника означена као најбољи пријатељ кажемо да је 1-*најбољи пријатељ*. Општије, ако је $n > 1$ природан број, тада је неки корисник n-*најбољи пријатељ* ако је означен као најбољи пријатељ од неког ко је $(n-1)$-*најбољи пријатељ*. За особу која је k-*најбољи пријатељ* за сваки природан број k кажемо да је *популарна*.

(а) Доказати да је свака популарна особа најбољи пријатељ неке популарне особе.

(б) Ако би било дозвољено да корисници имају бесконачно много пријатеља, доказати да би тада било могуће да постоји популарна особа која није најбољи пријатељ ниједне популарне особе.

Задатак 7. Нека је ABC оштроугли троугао са описаном кружницом Γ и ортоцентром H. Тачка K припада кружници Γ и са супротне стране је од праве BC у односу на теме A. Нека је L тачка симетрична тачки K у односу на праву AB, а M нека је тачка симетрична тачки K у односу на праву BC. Најзад, нека је E пресечна тачка кружнице Γ са описаном кружницом троугла BLM, различита од B. Доказати да се праве KH, EM и BC секу у једној тачки.

Задатак 8. Кажемо да је *реч* коначан низ слова неке азбуке. За неку реч кажемо *да је са понављањем* ако је настала надовезивањем бар две идентичне под-речи (на пример, речи *ababab* и *abcabc* су са понављањем, док речи *ababa* и *aabb* нису са понављањем).

Ако нека реч има особину да међусобном заменом места било која два њена суседна слова она постаје реч са понављањем, доказати да сва њена слова морају бити идентична. (Приметити да међусобна замена два суседна идентична слова не мења дату реч.)

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена