29. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Анталија, Турска – 28. април 2012.

1. Нека су A, B и C тачке кружнице Γ са центром O такве да је $\angle ABC > 90^\circ$. Нека је D тачка пресека праве AB и нормале на праву AC у C. Нека је ℓ права која садржи тачку D и нормална је на праву AO. Даље, нека је E тачка пресека правих ℓ и AC, а F она тачка пресека кружнице Γ и праве ℓ која се налази између тачака D и E.
Доказати да се описане кружнице троуглова BFE и CFD додирују у тачки F.
(Румунија)

2. Доказати да неједнакост

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geqslant 4(xy+yz+zx)$$

важи за све позитивне реалне бројеве x, y и z.
Сума на левој страни горње неједнакости једнака је

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

(Саудијска Арабија)

3. За природан број n нека је $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}$. За сваки подскуп X скупа P_n означимо са S_X збир свих елемената скупа X, при чему је $S_\emptyset = 0$, где је $\emptyset$ празан скуп. Нека је y реалан број такав да је $0 \leqslant y \leqslant 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
Доказати да постоји подскуп Y скупа P_n за који је $0 \leqslant y - S_Y < 2^n$.
(Велика Британија)

4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају следећа два услова:

(i) $f(n!) = f(n)!$ за сваки природан број n;

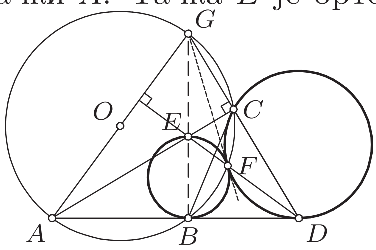
(ii) $m - n$ дели $f(m) - f(n)$ за све различите природне бројеве m и n.

(Саудијска Арабија)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Нека је G тачка на Γ дијаметрално супротна тачки A. Тачка E је ортоцентар троугла DAG, па G лежи на правој BE. Како је $\sphericalangle CDF = \sphericalangle GAC = \sphericalangle GFC$ и $\sphericalangle FBE = \sphericalangle FAG = \sphericalangle GFE$, права FG је заједничка тангента кругова CFD и BFE у F, па се ови кругови додирују у F.



2. По Коши-Шварцовој неједнакости је $(z+x)(z+y) \geqslant (z+\sqrt{xy})^2$, одакле добијамо

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} &\geqslant \textstyle\sum_{\text{cyc}}[(x+y)z+(x+y)\sqrt{xy}]\\ &\geqslant \textstyle\sum_{\text{cyc}}[(x+y)z+2xy] = 4(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

3. Тврђење доказујемо индукцијом по n. Оно је тривијално за $n=1$; претпоставимо да важи за $n-1$. Нека је дато y са $0 \leqslant y \leqslant 3^{n+1}-2^{n+1}$. Имамо два случаја:

(i) $0 \leqslant y \leqslant 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$. По индуктивној претпоставци постоји скуп $Y' \subset P_{n-1}$ за који је $0 \leqslant \frac{y}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Онда можемо узети $Y = 2Y' = \{2t \mid t \in Y'\}$.

(ii) $2\cdot 3^n - 2^{n+1} \leqslant y \leqslant 3^{n+1}-2^{n+1}$. Тада је $0 < 3^n - 2^{n+1} \leqslant y - 3^n \leqslant 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$, па по индуктивној претпоставци постоји подскуп $Y' \subset P_{n-1}$ за који је $0 \leqslant \frac{y-3^n}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Зато узимамо $Y = 2Y' \cup \{3^n\}$.

4. Из $f(1) = f(1)!$ и $f(2) = f(2)!$ следи $f(1), f(2) \in \{1,2\}$.

Претпоставимо да је $f(3) = 3$. Ако дефинишемо индуктивно $n_0 = 3$ и $n_{i+1} = n_i!$ за $i \geqslant 0$, важиће $f(n_i) = n_i$ за све i. Посматрајмо произвољан природан број m. Како разлика $m - n_i$ дели $f(m) - f(n_i)$, она дели и $f(m) - m$ за свако i, па $f(m) - m$ има бесконачно много делилаца; одавде је $f(m) = m$ за свако m.

Нека је сада $f(3) \neq 3$. Из $4 = 3! - 2 \mid f(3)! - f(2) = f(3)! - 2$ следи да $4 \nmid f(3)!$, па је $f(3) \in \{1,2\}$. Осим тога, $n! - 3$ дели $f(n)! - f(3)$ за свако $n \geqslant 4$, па $3 \nmid f(n)!$, одакле следи $f(n) \in \{1,2\}$ за све n. Лако се види да у том случају f мора бити константно.

Према томе, једина решења су функције $f \equiv 1$, $f \equiv 2$ и $f(x) = x$.