THE 4th ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

ДАН 1: ПЕТАК, 25. ФЕБРУАР 2011, БУКУРЕШТ

Language: Serbian

Задатак 1. Доказати да постоје две функције $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је $f \circ g$ строго опадајућа функција, а $g \circ f$ строго растућа.

Задатак 2. Наћи све природне бројеве n за које постоји полином $f(x)$ са реалним коефицијентима са следећим својствима:

(1) За сваки цео број k, број $f(k)$ је цео ако и само ако k није дељиво са n;

(2) Степен $f(x)$ је мањи од n.

Задатак 3. Троугао ABC је уписан у круг ω. Променљива права паралелна правој BC сече дужи AB и AC у тачкама D и E редом, и сече ω у тачкама K и L (D лежи између K и E). Круг γ_1 додирује дужи KD, BD и круг ω, а круг γ_2 додирује дужи LE, CE и круг ω. Одредити геометријско место тачака пресека унутрашњих заједничких тангенти кругова γ_1 и γ_2.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад $4\frac{1}{2}$ сати.

THE 4th ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

ДАН 2: СУБОТА, 26. ФЕБРУАР 2011, БУКУРЕШТ

Language: Serbian

Задатак 4. За природан број $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, означимо са $\Omega(n) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ укупан број простих фактора броја n бројаних са вишеструкостима. Дефинишимо $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (тако је нпр. $\lambda(12) = \lambda(2^2 \cdot 3^1) = (-1)^{2+1} = -1$).

Доказати следећа тврђења:

i) Постоји бесконачно много бројева $n \in \mathbb{N}$ са $\lambda(n) = \lambda(n+1) = +1$;
ii) Постоји бесконачно много бројева $n \in \mathbb{N}$ са $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

Задатак 5. Наћи све скупове $n \geq 3$ различитих тачака $X_1, X_2, \ldots, X_n$ у равни са својством да за сваки пар различитих тачака X_i, X_j постоји пермутација σ бројева $1, 2, \ldots, n$ таква да је $\mathrm{d}(X_i, X_k) = \mathrm{d}(X_j, X_{\sigma(k)})$ за све k, $1 \leq k \leq n$.
($d(X, Y)$ означава растојање између тачака X и Y.)

Задатак 6. Поља квадратне таблице 2011×2011 су означена бројевима $1, 2, \ldots, 2011^2$, при чему је сваки број коришћен тачно једном. Лева и десна ивица таблице су спојене, као и горња и доња, тако да се добије торус (површина аутомобилске гуме).

Одредити највећи природан број M такав да, како год означили поља таблице, постоје два суседна поља (са заједничком ивицом) означена бројевима који се разликују за бар M.[1]

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад $4\frac{1}{2}$ сати.

[1] Поља са координатама (x, y) и (x', y') се сматрају суседним ако је $x = x'$ и $y - y' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$, или $y = y'$ и $x - x' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$.