ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Први разред, А категорија

1. Перица покушава да пронађе $2n+1$ најмањих узастопних природних бројева, тако да је збир квадрата најмањих $n+1$ бројева једнак збиру квадрата највећих n бројева. Уколико пронађе такве бројеве, Перица их записује у $n-$ту врсту своје *пирамиде*, а уколико такви не постоје, $n-$та врста остаје празна. Након прва три корака ($n=1$, $n=2$ и $n=3$) Перицина пирамида има следећи изглед

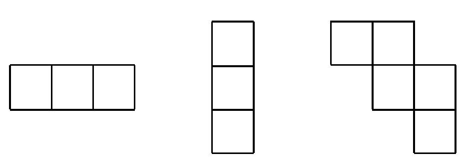
$$\begin{aligned} 3^2+4^2 &= 5^2 \\ 10^2+11^2+12^2 &= 13^2+14^2 \\ 21^2+22^2+23^2+24^2 &= 25^2+26^2+27^2. \end{aligned}$$

Кажемо да се бројеви 3, 4 и 5 налазе у првој врсти; бројеви 10, 11, 12, 13 и 14 се налазе у другој врсти; бројеви 21, 22, 23, 24, 25, 26 и 27 се налазе у трећој врсти. Уколико Перица настави са прављењем пирамиде на описани начин, да ли ће се у некој врсти наћи број 2011?

2. Нека су H и O редом ортоцентар и центар описане кружнице троугла ABC ($AB \neq AC$). Праве AH и AO секу описану кружницу троугла ABC по други пут у тачкама M и N, редом. Означимо са P, Q, R пресечне тачке правих BC и HN, BC и OM, HQ и OP, редом. Доказати да је четвороугао $AORH$ паралелограм.

3. За природан број кажемо да је *симетричан* ако се у декадном систему исто пише са лева на десно и са десна на лево. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да су бројеви n^2, n^3 и n^4 симетрични, а број n^5 није симетричан.

4. За које природне бројеве m и n се правоугаоник димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) фигурама састављених од јединичних квадрата као на слици? Фигуре се не могу ротирати или окретати.



Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Други разред, А категорија

1. Дат је оштроугли троугао ABC са ортоцентром H и центром описаног круга O. Нека симетрала дужи AH сече странице AB и AC у тачкама D и E, редом. Доказати да је A центар споља приписане кружнице троугла ODE.

2. За природан број k, обележимо са $S(k)$ збир цифара броја k. Да ли постоји природан број n за који важи

$$S(n+1)\cdot S(n+2)\cdot ...\cdot S(n+2010)\cdot S(n+2011)=S(n)^{2011}\,?$$

3. Одредити све вредности реалног параметра t тако да систем једначина

$$\begin{aligned} x+y+z+v &= 0 \\ xy+yz+zv+t(xz+xv+yv) &= 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. 40 разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима $1, 2, \ldots, 2011$. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k, $1 < k < 2011$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 2011, онда се премешта у пећину са бројем 2010). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може (у коначно много покушаја) да пронађе благо?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Трећи разред, А категорија

1. Нека су $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ нуле полинома $1+x+x^2+...+x^n$. Пронаћи најмањи природан број m такав да тачке $a_1^m,\ a_2^m, \ldots,\ a_n^m$ у комплексној равни леже на истој правој, ако је:

а) $n = 2011$;

б) $n = 2010$.

2. Матрица 2011×2011 се зове *златна* ако је попуњена бројевима 1, 2, 3, 4 и ако се у сваком квадрату 2×2 сваки од бројева 1, 2, 3, 4 појављује тачно једном. Одредити укупан број златних матрица.

3. Одредити најмањи природан број m такав да се бројеви $1^m,\ 2^m,\ \ldots,\ 2010^m$ могу поређати на кружници на такав начин да је збир свака два суседна броја са кружнице дељив са 2011.

4. Нека је D подножје висине из темена A оштроуглог $\triangle ABC$. Уочимо тачке E и F на страници BC такве да је $BD = CE$ и $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAF$. Нека је Q друга пресечна тачка праве AF и круга описаног око $\triangle ABC$. Ако су M и N, редом, средине страница AB и AC, доказати да се кругови описани око $\triangle ABC$ и $\triangle MNQ$ додирују.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Четврти разред, А категорија

1. Раван је обојена са 2 боје. Доказати да постоји једнакостраничан троугао странице $1\,\mathrm{cm}$ или странице $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, код кога су сва 3 темена обојена истом бојом.

Показати да не мора да постоји и једнакостраничан троугао странице $1\,\mathrm{cm}$ код кога су сва 3 темена обојена истом бојом и једнакостраничан троугао странице $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ код кога су сва 3 темена обојена истом бојом.

2. Нека је k кружница описана око оштроуглог троугла ABC, а тачка D дијаметрално супротна тачки A на k. Тангента у A на k и права BC секу се у тачки P, а права DP поново пресеца k у тачки Q. Нека су M и N, редом, средине страница AB и AC. Ако је Q' тачка на k таква да је $QQ' || BC$, а X пресечна тачка дужи AQ' и MN, доказати да је $BX = CX$.

3. У зависности од непарног природног броја $n > 1$, одредити остатак при дељењу броја

$$a = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(i,n)=1}} i$$

бројем n.

4. Нека је дат коначан скуп реалних бројева с особином да се сваки његов елемент може записати као збир неких двају елемената (не обавезно различитих) из истог скупа. За такав скуп кажемо да је *безбедности реда* n ако не садржи подскуп са n или мање елемената чији је укупан збир једнак 0. Доказати да постоји скуп произвољно великог (унапред датог) реда безбедности.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Први разред , Б категорија

1. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Уколико су A_1, B_1, C_1 и D_1 средишта лукова над тетивама AB, BC, CD, DA, редом, који не садрже неку од преосталих тачака, доказати да је $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

2. Одредити цифру јединица и цифру десетица броја

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2009 \cdot 2011.$$

3. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао, P и Q средине редом страница BC и EF и тачка T пресек дужи AP и BQ. Одредити $AT : TP$ и $BT : TQ$.

4. У зависности од реалног параметра a одредити сва реална решења једначине

$$3(1 + a + a^2) \cdot x = (1 + a + a^2)^2 \cdot x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1.$$

5. Раван је обојена у 2 боје. Доказати да постоји троугао са страницама дужина $1\,\mathrm{cm}$, $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и $2\,\mathrm{cm}$ чија су сва темена исте боје.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

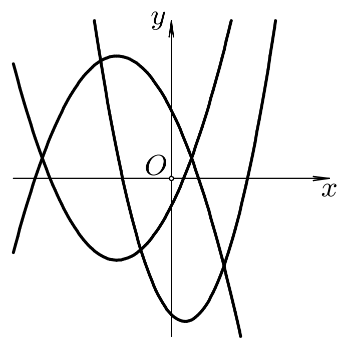
Други разред, Б категорија

1. Доказати да у сваком правоуглом троуглу важи

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2},$$

где су a и b дужине катета, а h дужина хипотенузине висине.

2. На слици су скицирани графици три квадратне функције.



Да ли постоје реални бројеви a, b и c тако да су на њој приказани графици функција $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$ и $y=cx^2+ax+b$?

3. За комплексан број z важи $\left|\dfrac{z+i}{1+z}\right|=1$. Доказати да је

$$\left|z^{2010}+iz^{2009}+...+i^{2009}z+i^{2010}\right|=\left|z^{2010}+z^{2009}+...+z+1\right|.$$

4. На колико начина се могу поставити бели и црни скакач на шаховску таблу димензија 8×8 тако да се међусобно не нападају?

5. Перица има 1012 налепница на којима се налазе бројеви 1000, 1001, ..., 2011 (сваки број се налази на једној налепници). Он жели да залепи налепнице (не нужно све) у низ (једну иза друге) тако да добије највећи могући број који је дељив са 99 (ако употреби k налепница, добија број који има укупно $4k$ цифара). Како Перица треба да залепи налепнице да би остварио свој циљ?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да је број $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ дељив са 56 за сваки природан број n.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$2\log_{\frac{1}{2}}\left(4^{\sqrt{x^2-1}} - 1\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(4^{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2}\right) \geqslant -1.$$

3. Дат је четвороугао $ABCD$. Нека је $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$ и P површина четвороугла $ABCD$.

а) Доказати да је

$$16P^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cdot \cos(\beta + \delta).$$

б) Нека је $A'B'C'D'$ тетиван четвороугао коме су дужине страница a, b, c и d. Доказати да је површина четвроугла $A'B'C'D'$ барем P.

4. Тачке које одговарају комплексним бројевима a, b, c, a^2, b^2 и c^2 (у неком поретку) чине темена правилног шестоугла чији је центар уписане кружнице тачка која одговара броју 0. Доказати да је $abc = -1$.

5. 40 разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима 1 до 5. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k, $1 < k < 5$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 5, онда се премешта у пећину са бројем 4). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може (у коначно много покушаја) да пронађе благо?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Четврти разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем неједначина

$$\begin{aligned} x+4 &> \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0,25} 3} \\ x\cdot\log_{0,5}(x^2+3x)+\log_3 9^x &> 0. \end{aligned}$$

2. Нека су M и N средишта дужи AB и AC, редом, једнакостраничног троугла ABC и P тачка таква да је N средиште дужи MP. Нека је $ND \perp AP$ $(D \in AP)$ и $ND \cap BC = \{Q\}$. Доказати:

а) $PA \perp AB$;

б) $DQ = \dfrac{3}{4}BC$.

3. Колико решења у скупу природних бројева има једначина

$$x+y+z=2011$$

таквих да је $x \geqslant 19$ и $y \geqslant 3$?

4. Ако су a, b и n природни бројеви доказати да се број $(a^2+b^2)^n$ може приказати као сума квадрата два цела броја.

5. Нека је a цео број. Одредити нуле полинома

$$x^3+ax-13x+42$$

ако је познато да су све оне цели бројеви.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.