РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Први разред, А категорија

1. Како за произвољан троугао XYZ, његово тежиште T и произвољну тачку P важи $\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY}+\overrightarrow{PZ}=3\cdot\overrightarrow{PT}$, то је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3} &= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}\right)+\overrightarrow{OH}.
\end{aligned}$$

По Хамилтоновој формули је $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{HO}$, што завршава наш доказ. (Тангента 61, стр. 35, Писмени задаци, задатак 5)

2. Постоје две могућности, да у једном кавезу буде 5 птица, а у друга два по три, или да у два кавеза буде по четири птице, а у преосталом три.

У првом случају, пет птица за најпунији кавез можемо одабрати на $\binom{11}{5}$ начина. Преостале птице делимо у две групе од по три, што можемо урадити на $\frac{1}{2}\binom{6}{3}$ начина.

У другом случају, три птице за најмање пун кавез можемо одабрати на $\binom{11}{3}$ начина. Преостале птице делимо у две групе од по четири, што можемо урадити на $\frac{1}{2}\binom{8}{4}$ начина.

Према томе, укупан број распореда је

$$\binom{11}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{6}{3}+\binom{11}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{4}=462\cdot 10+165\cdot 35=10395.$$

3. Посматрајмо део таблице без последње колоне. Овај део таблице се може поделити на $\frac{2010^2}{4}$ дисјунктних квадрата димензије 2×2, па је у овом делу обојено највише $2\cdot\frac{2010^2}{4}$ поља. Дакле, како последња колона саджи 2010 поља, у таблици је обојено највише

$$2\cdot\frac{2010^2}{4}+2010=2010\cdot 1006 \text{ поља.}$$

Приметимо да уколико обојимо сваку другу колону, почевши од прве, добијамо бојење које задовољава услове задатка и у коме је обојено $2010\cdot 1006$ поља, па је тражени број једнак $2010\cdot 1006$.

4. Претпоставимо да тражени бројеви n и m постоје. Како је 2011 прост број, то су сви умношци на левој страни степени броја 2011 или једнаки 1. Зато је $S(n)=2011^\alpha$ и $S(n+1)=2011^\beta$, за неке $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0$. Како за сваки природан број k важи $S(k)\equiv k \pmod 3$, то је

$$1\equiv(n+1)-n\equiv S(n+1)-S(n)\equiv 2011^\beta-2011^\alpha\equiv 1-1\equiv 0 \pmod 3,$$

што је контрадикција.

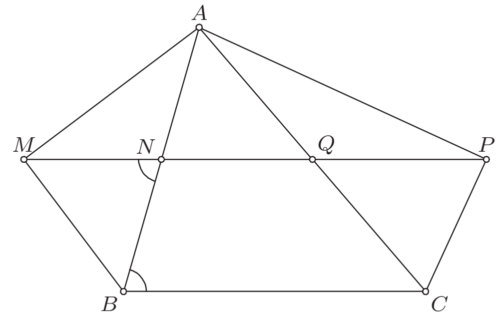
5. *Прво решење.* Нека су N и Q средишта страница AB и AC, редом. Како је троугао AMB правоугли, а N средиште хипотенузе, то је $MN=NB$, па је $\sphericalangle NMB=\sphericalangle NBM$. Даље, како је BM симетрала спољашњег угла код темена B, то је $\sphericalangle NBM=90^\circ-\frac{1}{2}\cdot\sphericalangle ABC$, па је

$$\sphericalangle MNB = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle NBM = \sphericalangle ABC.$$

Из последњег је $MN \parallel BC$. Слично је $PQ \parallel BC$. Како је NQ средња линија троугла ABC, то је и $MN \parallel BC$, па су тачке M, N, P и Q колинеарне. Како је $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$, $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$ и $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$, то је

$$MP = MN + NQ + QP = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA),$$

што је и требало доказати. (Тангента 54, стр. 47, Писмени задаци, задатак 3)

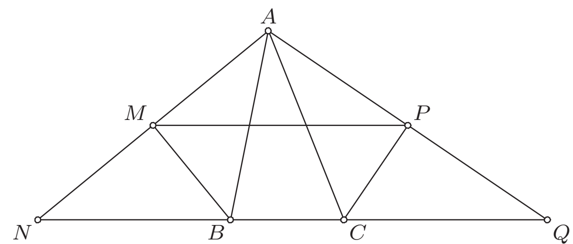


ОП 2011 1А 5-1

Друго решење. Нека су пресеци правих AM и AP са правом BC тачке N и Q, редом. За троуглове NBA и QCA важи да су симетрале углова код темена B и C, редом, нормалне на наспрамну страницу, па су ови троуглови једнакокраки. Самим тим, $NB = AB$, $QC = AC$ и тачке M и P су средишта страница AN и AQ, редом. Зато је MP средња линија троугла ANQ и важи

$$MP = \frac{1}{2} \cdot (NB + BC + CQ) = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA),$$

што је и требало доказати.



ОП 2011 1А 5-2

Други разред, А категорија

1. **(а)** За $a \neq -2$ су x_1 и x_2 различити од нуле, па израз има смисла. Даље, према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = \dfrac{3a+1}{4}$ и $x_1 x_2 = -\dfrac{a+2}{4}$, па је

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{9a^2 + 14a + 17}{(a+2)^2}.$$

Како је $(a+2)^2 > 0$, услов задатке се своди на $9(9a^2 + 14a + 17) \geqslant 40(a+2)^2$, односно

$$41a^2 - 34a - 7 \geqslant 0.$$

Решења одговарајуће квадратне једначине су $-\dfrac{7}{41}$ и 1, па је скуп решења последње неједначине $\left(-\infty, -\dfrac{7}{41}\right] \cup [1, +\infty)$. Како је $a \neq -2$, то је

$$a \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{41}\right] \cup [1, +\infty).$$

(б) Нека је $f(x) = 4x^2 - (3a+1)x - a - 2$. Да би оба решења припадала интервалу $(-1, 2)$ довољно је да $f(-1)$ и $f(2)$ буду истог знака, односно $f(-1) \cdot f(2) > 0$, да се x-координата темена параболе налази у интервалу $(-1, 2)$, односно да је $-1 < \dfrac{3a+1}{8} < 2$ и да y-координата темена и $f(-1)$ буду различитог знака, односно $f\left(\dfrac{3a+1}{8}\right) \cdot f(-1) < 0$. Како је $f(-1) = 2a+3$, $f(2) = -7a + 12$ и $f\left(\dfrac{3a+1}{8}\right) = -\dfrac{9a^2 + 22a + 33}{16}$, то се последње своди на

$$(2a+3)(-7a+12) > 0, \quad -3 < a < 5, \quad \frac{9a^2 + 22a + 33}{16} \cdot (2a+3) > 0.$$

Из прве неједначине закључујемо да је $-\dfrac{3}{2} < a < \dfrac{12}{7}$, а за ове вредности параметра a задовољена је и друга неједначина. Како је дискриминанта квадратног тринома $9a^2+22a+33$ једнака $22^2-4\cdot 9\cdot 33 < 0$, то је $9a^2+22a+33 > 0$, за све $a \in \mathbb{R}$. Самим тим, свако a из интервала $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{12}{7}\right)$ задовољава и трећу неједначину, па овај интервал представља решење задатка. (Тангента 62, стр. 36, Писмени задаци, задатак 2)

2. По формули за косинус двоструког угла имамо

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+10x)+1}{2} = \frac{-\sin 10x+1}{2}$$

и слично $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+4x\right) = \dfrac{-\sin 8x+1}{2}$, па се једнакост своди на

$$\sin 8x - \sin 10x = 2\cdot \sin^2 x \cdot \cos 9x.$$

По формули за разлику синуса је $\sin 8x - \sin 10x = -2\cdot \sin x \cdot \cos 9x$, па је последња једнакост еквивалентна са

$$\sin x \cdot \cos 9x \cdot (1+\sin x) = 0.$$

Дакле, $\sin x = 0$, $\cos 9x = 0$ или $\sin x = -1$, па је скуп решења $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{9} \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Како је $\left\{\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \subseteq \left\{\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{9} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, то се скуп решења може записати и као

$$\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{9} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(Тангента 54, стр. 47, Писмени задаци, задатак 2)

3. Нека су углови код темена A, B и C троугла ABC редом α, β и γ. Тада је из правоуглих троуглова AEB и ADB

$$AE = AB\sin\beta, \quad BD = AB\sin\alpha.$$

Како је $\sphericalangle ABP = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BAP = 90^\circ - \beta$ и $\sphericalangle APB = \alpha+\beta$, применом синусне теореме на троугао APB добијамо

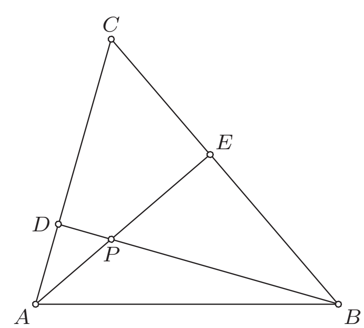
$$AP = AB\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$BP = AB\cdot\frac{\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Сада је

$$AP\cdot AE + BP\cdot BD = AB^2\cdot\frac{\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = AB^2,$$

што је и требало доказати.



ОП 2011 2А 3

4. Приметимо да је $1+2+\cdots+50 = \dfrac{50\cdot 51}{2} = 1275$ и $\dfrac{1275-1}{2} = 637$. Поделимо све подскупове скупа $\{1,2,\ldots,50\}$ у парове: сваки подскуп је у пару са својим комплементом. Приметимо да у сваком пару тачно један од подскупова има суму елемената већу од 637. Према томе, постоји укупно $\dfrac{1}{2}\cdot 2^{50} = 2^{49}$ тражених подскупова.

5. Претпоставимо да је $\sphericalangle ACB > 45^\circ$ (случај $\sphericalangle ACB < 45^\circ$ се аналогно решава). Како је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB = 90^\circ$ тачке A, N, M и B су концикличне. Самим тим,

$$\begin{aligned}\sphericalangle AMN &= \sphericalangle ABN \quad \text{(углови над тетивом } AN\text{)}\\ \sphericalangle MAN &= \sphericalangle MBN \quad \text{(углови над тетивом } MN\text{).}\end{aligned}$$

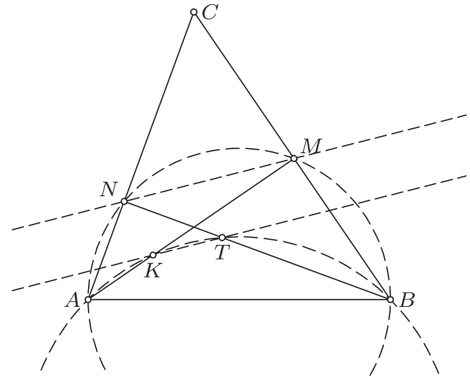
Даље, како су троуглови ANT и BKM једнакокрако-правоугли, то је

$$\begin{aligned}\sphericalangle TAK &= \sphericalangle TAN - \sphericalangle MAN = 45^\circ - \sphericalangle MBN\\ &= \sphericalangle KBT,\end{aligned}$$

па су тачке A, K, T и B концикличне. Самим тим, $\sphericalangle AKT + \sphericalangle ABT = 180^\circ$, па је

$$\begin{aligned}\sphericalangle TKM &= 180^\circ - \sphericalangle AKT = \sphericalangle ABT = \sphericalangle ABN\\ &= \sphericalangle AMN.\end{aligned}$$

Из последњег је јасно $KT \parallel MN$.



ОП 2011 2А 5

Трећи разред, А категорија

1. Број непарних бројева написаних на табли се не мења ако су избрисана два броја различите парности или ако су избрисана два парна броја, док се смањује за 2 ако су избрисана два непарна броја. Дакле, парност броја непарних бројева на табли је инваријанта (не мења се) применом задатог поступка. Како је на почетку било 15 непарних бројева, закључујемо да ће последњи број на табли бити непаран. (Тангента 57, страна 13, Наградни задаци, M804)

2. Из синусних теорема за троугао ABC, односно $A'B'C'$, је

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle ACB} = \frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC} = \frac{CA}{\sin\sphericalangle CBA}, \quad \text{односно} \quad \frac{A'B'}{\sin\sphericalangle A'C'B'} = \frac{B'C'}{\sin\sphericalangle B'A'C'} = \frac{C'A'}{\sin\sphericalangle C'B'A'},$$

па је довољно доказати

$$2\cdot\sin\sphericalangle BAC\cdot\sin\sphericalangle B'A'C' \geqslant \sin\sphericalangle ABC\cdot\sin\sphericalangle A'B'C' + \sin\sphericalangle ACB\cdot\sin\sphericalangle A'C'B'. \qquad (*)$$

Нека је $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle A'B'C' = \beta'$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle A'C'B' = \gamma'$. Из услова задатка $(*)$ се своди на

$$\frac{3}{2} \geqslant \sin\beta\cdot\sin\beta' + \sin\gamma\cdot\sin\gamma'.$$

Даље, коришћењем тригонометријских идентитета и $\beta+\gamma = \beta'+\gamma' = 120^\circ$, добијамо

$$\begin{aligned}\sin\beta\sin\beta' + \sin\gamma\sin\gamma' &= \frac{\cos(\beta-\beta') - \cos(\beta+\beta') + \cos(\gamma-\gamma') - \cos(\gamma+\gamma')}{2}\\ &= \cos(\beta-\beta') - \cos\frac{\beta+\beta'+\gamma+\gamma'}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\beta'-\gamma-\gamma'}{2}\\ &= \cos(\beta-\beta') - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\beta'-\gamma-\gamma'}{2} \leqslant \frac{3}{2},\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

3. Докажимо прво да је у сваком кораку на табли записан полином степена највише два. Нека је на табли записан квадратни трином $f(x) = ax^2+bx+c$. Тада је

$$x^2\cdot f\left(1+\frac{1}{x}\right) = (a+b+c)x^2 + (b+2a)x + a \quad \text{и} \quad (x-1)^2\cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right) = cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c).$$

Даље, приметимо да је

$$(b+2a)^2 - 4a(a+b+c) = (b-2c)^2 - 4c(a-b+c) = b^2-4ac,$$

па после сваког корака полином записан на табли има дискриминанту $2010^2 - 4\cdot 2011$ (узимамо да је дискриминатна полинома $ax+b$ једнака a^2, а константног полинома 0). Како је дискриминанта полинома $x^2+2011x+2010$ једнака $2011^2-4\cdot 2010$, он не може бити записан на табли.

4. *Прво решење.* На правој CD доцртамо тачку Z, тако да важи $\sphericalangle BZC = \sphericalangle ADB$. Због једнакости углова над тетивом AB добијамо да је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AMB$, па је четвороугао $MXBZ$ тетиван. Из потенције тачке Y у односу на ова два круга добијамо

$$YM \cdot YB = XY \cdot YZ,$$

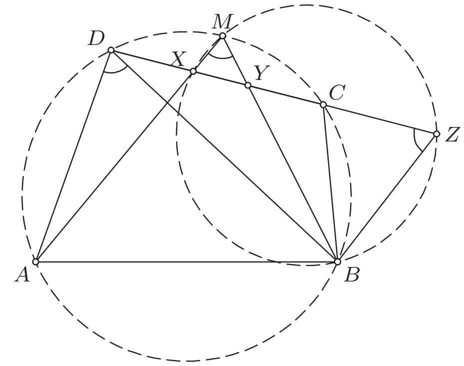
односно

$$YM \cdot YB = YD \cdot YC.$$

На основу претходних једнакости добијамо

$$\begin{aligned} DX \cdot CY &= (DY - XY) \cdot CY \\ &= XY \cdot YZ - XY \cdot YC = XY \cdot CZ, \end{aligned}$$

па је дати израз једнак CZ и не зависи од избора тачке M. (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, M755)



ОП 2011 3А 4

Друго решење. Уведимо комплексну раван, тако да је круг описан око четвороугла $ABCD$ јединични. Нека тачкама одговарају комплексни бројеви означени одговарајућим малим словима. По формули за пресек тетива јединичног круга имамо

$$x = \frac{am(c+d) - cd(a+m)}{am - cd}, \qquad y = \frac{bm(c+d) - cd(b+m)}{bm - cd}.$$

Сада је

$$x - d = \frac{am(c+d) - cd(a+m)}{am - cd} - d = \frac{c(am + d^2 - da - dm)}{am - cd} = \frac{c(a-d)(m-d)}{am - cd},$$

и аналогно $y - c = \dfrac{d(b-c)(m-c)}{bm - cd}$. Такође,

$$x - y = \frac{cdm^2(a-b) - cdm(c+d)(a-b) + c^2d^2(a-b)}{(am-cd)(bm-cd)} = \frac{cd(a-b)(m-c)(m-d)}{(am-cd)(bm-cd)},$$

па је $\dfrac{DX \cdot CY}{XY} = \left|\dfrac{(a-d)(b-c)}{a-b}\right| = \dfrac{AD \cdot BC}{AB}$, што не зависи од тачке M.

5. **(а)** Претпоставимо да овај низ садржи барем два потпуна квадрата и нека је $mp^k + 1 = a^2$ и $mp^l + 1 = b^2$, где је $k < l$, а $a, b \in \mathbb{N}$. Из ових једнакости добијамо

$$(a^2 - 1)p^{2s} = b^2 - 1, \tag{$*$}$$

где је $l - k = 2s$. Како је НЗД$(b-1, b+1)$ једнако 1 или 2, то за $p \neq 2$ важи $p^{2s} \mid b - 1$ или $p^{2s} \mid b + 1$. Уколико је $p = 2$, тада је $a^2 - 1$ дељиво са 2, па опет $2^{2s} \mid b - 1$ или $2^{2s} \mid b + 1$. Самим тим, у оба случаја мора бити $b + 1 \geqslant p^{2s}$.
Једнакост $(*)$ је даље еквивалентна са $a^2p^{2s} - b^2 = p^{2k} - 1$, односно

$$(ap^s - b)(ap^s + b) = p^{2s} - 1,$$

па $ap^s + b \mid p^{2s} - 1$. Међутим, $ap^s + b > b \geqslant p^{2s} - 1$, контрадикција.
(б) Не. Нека је $p = 2$ и $m = 2$. Како је $2 \cdot 2^{2k+1} + 1 \equiv 2 \pmod 3$, то је сваки члан низа конгруентан са 2 по модулу 3, па не може бити потпун квадрат.

Четврти разред, А категорија

1. Област дефинисаности функције је $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Одредимо извод функције у овој области:

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' + \left(\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\right)' + 2 \cdot \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

што доказује да је функција заиста константа на сваком од интервала $(-\infty,0)$, $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Како је $f(-1)=-\frac{\pi}{4}+0-2\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)=0+\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$ и $\lim\limits_{x\to 1_+} f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$, то је

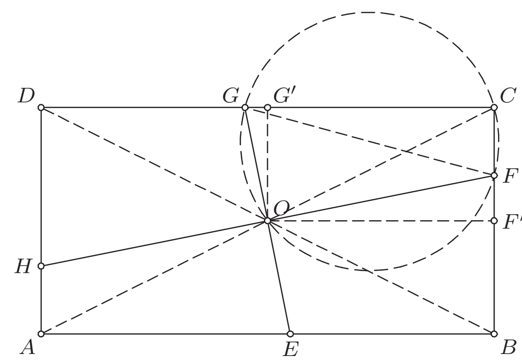
$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{5\pi}{4}, & x\in(0,1)\\ \frac{\pi}{4}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

2. Нека је O тачка пресека дијагонала ромба $EFGH$. Како је $\sphericalangle FOG=90^\circ$, то је због $\sphericalangle FOG+\sphericalangle FCD=180^\circ$, четвороугао $FCGO$ тетиван. Зато је $\sphericalangle FOC=\sphericalangle FGC$, као углови над заједничком тетивом FC. Аналогним разматрањем добијамо да је и $\sphericalangle HOA=\sphericalangle HEA$. Даље, $\sphericalangle FGC=\sphericalangle HEA$, као углови са паралелним крацима, па је због показаних једнакости и $\sphericalangle FOC=\sphericalangle HOA$. Самим тим, тачке A, O и C су колинеарне. Аналогно, тачке B, O и D су колинеарне, па је O пресек дијагонала правоугаоника $ABCD$.

Нека су тачке F' и G', редом, подножја нормала конструисаних из тачке O на странице BC и CD. Троуглови $\triangle OF'F$ и $\triangle OG'G$ су слични (имају једнаке све углове), па је $\frac{OF}{OG}=\frac{OF'}{OG'}=\frac{AB}{BC}=2$, па је

$$P=2\cdot OF\cdot OG=OF^2.$$

Како је растојање тачке O од произвољне тачке са странице BC бар 1, а мање је од половине дијагонале правоугаоника, то је $1\leqslant P=OF^2<\frac{5}{4}$, што је и требало доказати.

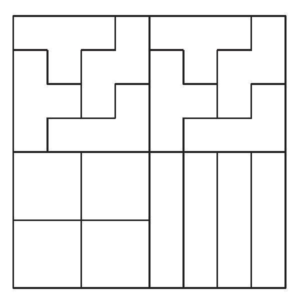


ОП 2011 4А 2

3. Нека је $n\times n$ највећи квадрат који се може поплочати. Укупна површина свих расположивих фигурица је 100, те је $n^2\leqslant 100$, односно $n\leqslant 10$. Уз то, како је површина сваке фигурице 4, имамо да $4\mid n^2$, односно n је паран број.
Докажимо да није могуће поплочати квадрат странице 10. Претпоставимо супротно. Ако јединична поља квадрата 10×10 обојимо наизменично црном и белом бојом (шаховски), онда и црних и белих поља има по 50. Приметимо да свака фигурица, осим треће наведене, прекрива по два црна и два бела поља. Трећа фигурица прекрива три поља једне и једно поље друге боје.

Нека је x фигурица које прекривају 3 црна и једно бело поље, а $y=5-x$ фигурица које прекривају 3 бела и једно црно поље. Како је разлика броја прекривених црних и бели поља једнака нули, мора бити $(3x+y)-(3y+x)=0$. Међутим, из последњег добијамо $x=\frac{5}{2}$, што није могуће.

Слика са десне стране показује да се квадрат странице 8 може поплочати, па је тражена површина једнака 64.



ОП 2011 4А 3

4. Ако број $ab+1$ дели $X=a^3+3ab^2+2$ и $Y=3b^4-2b^3+3$, онда дели и број

$$b^3X+Y=(ab)^3+3b^4(ab+1)+3.$$

Број $(ab)^3+1$ је дељив са $ab+1$, јер је $(ab)^3+1=(ab+1)((ab)^2-ab+1)$, па добијамо $ab+1\mid 2$. Зато је $ab+1\leqslant 2$, па (a,b) може бити само пар $(1,1)$. Провера показује да $(a,b)=(1,1)$ јесте решење.

5. Доказаћемо прво да у сваком троуглу важи

$$\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_b^2}=\frac{R+2r}{2Rr}, \qquad (*)$$

где су h_a, h_b и h_c одговарајуће висине.

Ако са S обележимо површину, са p полуобим, а са α, β и γ углове троугла, тада из идентитета $\dfrac{h_a}{l_a}=\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$, $ah_a=2S=2pr$, $a=2R\sin\alpha$ добијамо

$$\begin{aligned}\frac{h_a}{l_a^2} &= \left(\frac{h_a}{l_a}\right)^2\cdot\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2pr}\cdot\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{R\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{pr}\\ &= \frac{R}{2pr}\cdot\left(\sin\alpha+\frac{\sin2\beta+\sin2\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

па је $L=\dfrac{h_a}{l_a^2}+\dfrac{h_b}{l_b^2}+\dfrac{h_c}{l_b^2}=\dfrac{R}{2pr}\cdot[(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)]$.

Сада, користећи идентитете $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{p}{R}$, $4\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{r}{R}$ и $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=32\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, који важе за углове троугла, добијамо једнакост $(*)$.

Даље, применом неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског на тројке $\left(\dfrac{\sqrt{h_a}}{l_a},\dfrac{\sqrt{h_b}}{l_b},\dfrac{\sqrt{h_c}}{l_c}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{h_a}},\dfrac{1}{\sqrt{h_b}},\dfrac{1}{\sqrt{h_c}}\right)$, добијамо

$$\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)^2\leqslant\left(\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_b^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=\frac{R+2r}{2Rr}\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),$$

па како је $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{a+b+c}{2S}=\dfrac{1}{r}$, то тражена неједнакост заиста важи.

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{l_a}{h_a}=\dfrac{l_b}{h_b}=\dfrac{l_c}{h_b}$, односно ако и само ако је $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}=\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Последње је еквивалентно са $|\alpha-\beta|=|\beta-\gamma|=|\gamma-\alpha|$. Нека је без умањења општости γ највећи од ова три угла. Тада из $\gamma-\alpha=\gamma-\beta$ добијамо $\alpha=\beta$, па је и $\gamma=\alpha$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је троугао једнакостраничан. (Тангента 61, стр. 17, Наградни задаци, М903)

Први разред, Б категорија

1. Из првог услова је $B\subseteq\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, из другог $a\in B$, а из последњег $\{d,e,f,g,h\}\subseteq B$. Из трећег услова $c\notin B$ и $i\notin B$. Из прва два услова закључујемо да се b налази у тачно једном од скупова A и B, што заједно са четвртим условом даје $b\in A$ и $b\notin B$. Значи $B=\{a,d,e,f,g,h\}$, па је $A=\{a,b,c,i\}$. (Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци, задатак 2)

2. Таблица релације дата је са десне стране. Можемо приметити да уколико је $a\,\rho\,b$, да је $a=25$. Самим тим, ρ није рефлексивна, а јесте антисиметрична и транзитивна. Како је $25\,\rho\,53$, то релација није симетрична. (Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци, задатак 3)

ρ	25	53	71	74
25	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
53	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
71	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
74	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

ОП 2011 1Б 2

3. Како Ана мора седети до Бојана, а Весна до Горана, потребно је распоредити 16 људи и 2 пара, односно укупно 18 „група”. При томе у свакој од две групе са по два члана имамо 2 различита распореда, па је тражени број распореда једнак $2\cdot2\cdot18!$.

4. Нека је $x=5^{20}\cdot20^5$. Како је $x=5^{20}\cdot4^5\cdot5^5=2^{10}\cdot5^{25}=10^{10}\cdot5^{15}$, то је последњих 10 цифара броја x једнако нули, док су преостале три непознате цифре последње три цифре броја 5^{15}. Приметимо да важи $5^{15} - 5^3 = 5^3(5^{12} - 1) = 5^3(25^6 - 1)$. Како 25^6 даје остатак 1 при дељењу са 8, то $8 \mid 25^6 - 1$, па $1000 \mid 5^{15} - 5^3$. Зато су последње три цифре броја 5^{15} исте као и последње три цифре броја 5^3, односно преостале три цифре су редом 1, 2 и 5.

5. **(а)** По дефиницији функција f и g је $(f\circ g)(2010) = f(g(2010)) = f(4020) = 4021$ и $(g\circ f)(2011) = g(f(2011)) = g(2010) = 4020$.
(б) Потребно је размотрити два случаја:
1° n паран. Тада је $(f\circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n+1$ и $(g\circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = 3(n+1)$ (последња једнакост важи јер је $n+1$ непаран).
2° n непаран. Тада је $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(3n) = 3n - 1$ (последња једнакост важи јер је $3n$ непаран) и $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n-1) = 2(n-1)$ (последња једнакост важи јер је $n-1$ паран).
Дакле, $(f \circ g)(n) = \begin{cases} 2n+1, & n \text{ паран} \\ 3n-1, & n \text{ непаран} \end{cases}$, $\quad (g \circ f)(n) = \begin{cases} 3(n+1), & n \text{ паран} \\ 2(n-1), & n \text{ непаран} \end{cases}$.
(Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци, задатак 5)

Други разред, Б категорија

1. Видети први задатак за други разред А категорије.

2. Потребно је доказати да је $A = m^5n - mn^5 = mn(m^4 - n^4)$ дељиво са 30, односно са 2, 3 и 5. Уколико је m или n дељиво са 2, тада је mn, па и A, дељиво са 2. Уколико су m и n непарни, тада су и m^4 и n^4 непарни, па је $m^4 - n^4$ паран, а самим тим и A дељив са 2.
Уколико је m или n дељиво са 3, тада је mn, па и A, дељиво са 3. Уколико m и n нису дељиви са 3, тада m^2 и n^2 дају остатак 1 при дељењу са 3, па је $m^4-n^4 = (m^2-n^2)(m^2+n^2)$ дељиво са 3. Самим тим је и A дељиво са 3.
Уколико је m или n дељиво са 5, тада је mn, па и A, дељиво са 5. Нека зато m и n нису дељиви са 5. Четврти степен броја који није дељив са 5 мора давати остатак 1 при дељењу са 5 (важи $(5k + l)^4 \equiv l^4 \pmod 5$, а $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ и $4^4 = 256$), па $5 \mid m^4 - n^4$, а зато и $5 \mid A$. (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 4)

3. Важи $\quad \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda+1)i} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda+1)i} \cdot \dfrac{\lambda - (\lambda+1)i}{\lambda - (\lambda+1)i} = \dfrac{\lambda - (\lambda+1)\sqrt{3} - (\lambda\sqrt{3} + \lambda + 1)i}{\lambda^2 + (\lambda+1)^2}$.
Како је λ реалан број, потребан и довољан услов да последњи број буде реалан је $\lambda\sqrt{3} + \lambda + 1 = 0$, односно $\lambda = -\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$. (Тангента 61, стр. 32, Писмени задаци, задатак 5)

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Нека су A', B', C' тачке пресека продужетака дужи AP, BP и CP са кружницом описаним око троугла ABC, редом. Тада важи

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABB' &= \sphericalangle AA'B' \quad (\text{над тетивом } AB') \\ \sphericalangle ACC' &= \sphericalangle AA'C' \quad (\text{над тетивом } AC'), \end{aligned}$$

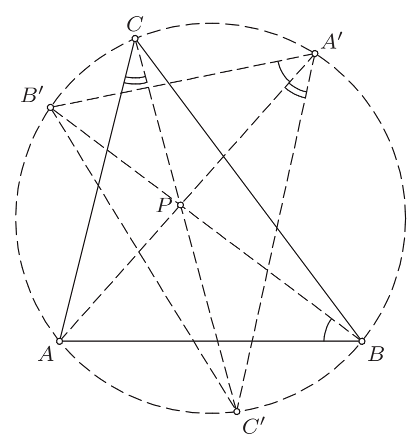
па је

$$\begin{aligned} \sphericalangle B'A'C' &= \sphericalangle ABB' + \sphericalangle ACC' \\ &= \alpha - \sphericalangle B'BC + \gamma - \sphericalangle C'CB. \end{aligned}$$

Како је $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$, а $\sphericalangle B'BC + \sphericalangle C'CB = 180^\circ - \sphericalangle BPC$, то је

$$\begin{aligned} \sphericalangle B'A'C' &= 180^\circ - \beta - (180^\circ - \sphericalangle BPC) \\ &= \sphericalangle BPC - \beta = 60^\circ. \end{aligned}$$

Аналогно добијамо да је $\sphericalangle A'B'C' = 70^\circ$ и $\sphericalangle A'C'B' = 50^\circ$, па су углови троугла $A'B'C'$ једнаки 50°, 60° и 70°.



ОП 2011 2Б 5

Трећи разред, Б категорија

1. Уколико прву једначину помножимо редом са $-\frac{3}{2}$, -1 и $-\frac{3}{2}$ и додамо другој, трећој и четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{llllll} 2x & +3y & +2z & & +3t & = 0 \\ & -\frac{5}{2}y & & & -\frac{5}{2}t & = 0 \\ & -y & +z & & & = 0 \\ & -\frac{3}{2}y & -z & + & \left(m-\frac{9}{2}\right)t & = 0. \end{array}$$

Уколико сада помножимо другу једначину редом са $-\frac{2}{5}$ и $-\frac{3}{5}$ и додамо трећој и четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{llllll} 2x & +3y & +2z & & +3t & = 0 \\ & -\frac{5}{2}y & & & -\frac{5}{2}t & = 0 \\ & & z & & +t & = 0 \\ & & -z & + & (m-3)\,t & = 0. \end{array}$$

Уколико сада четвртој једначини додамо трећу, добијамо

$$\begin{array}{lllll} 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & -\frac{5}{2}y & & -\frac{5}{2}t & = 0 \\ & & z & +t & = 0 \\ & & & (m-2)\,t & = 0. \end{array}$$

Уколико је $m \neq 2$, тада је $t = 0$, па из преосталих једначина добијамо $z = y = x = 0$, тј. систем има јединствено решење.
Уколико је $m = 2$, тада је $t = \alpha$, где је α произвољан реалан број. Из преосталих једначина добијамо $z = -\alpha$, $y = -\alpha$ и $x = \alpha$, па систем има бесконачно много решења.
Дакле, систем има бесконачно много решења ако и само ако је $m = 2$.

2. Видети други задатак за други разред А категорије.

3. Услови дефинисаности датог израза су

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad x^3 + 1 > 0, \qquad x + 1 > 0, \qquad x + 1 \neq 1.$$

Приметимо да уколико је $x > 0$ и $x \neq 1$, тада су и преостали услови задовољени. Дата неједначина је еквивалентна са

$$0 < \log_x(x^3+1) \cdot \frac{1}{\log_x(x+1)} - 2 = \frac{\log_x \dfrac{x^3+1}{(x+1)^2}}{\log_x(x+1)} = \frac{\log_x \dfrac{x^2-x+1}{x+1}}{\log_x(x+1)}.$$

Потребно је размотрити следећа два случаја:

1° $x > 1$. Тада је $\log_x(x+1) > 0$, па је неједначина еквивалентна са $\log_x \frac{x^2-x+1}{x+1} > 0$, односно са $\frac{x^2-x+1}{x+1} > 1$. Како је $x+1 > 0$, последње је еквивалентно са $x \cdot (x-2) > 0$. Дакле, у овом случају скуп решења је $(2, +\infty)$.

2° $0 < x < 1$. Тада је $\log_x(x+1) < 0$, па је неједначина еквивалентна са $\log_x \frac{x^2-x+1}{x+1} < 0$, односно са $\frac{x^2-x+1}{x+1} > 1$. Како је $x+1 > 0$, последње је еквивалентно са $x \cdot (x-2) > 0$. Дакле, у овом случају нема решења.
Из 1° и 2° закључујемо да је скуп решења $(2, +\infty)$.

4. Пресек дате зарубљене купе и равни која пролази кроз центре основа и нормална је на основе је једнакокраки трапез у који се може уписати круг.

Нека су a и b редом полупречници веће и мање основе купе, а r полупречник лопте уписане у ову купу. Тада су основе трапеза $2a$ и $2b$, а висина $2r$. Како је трапез тангентни, то је дужина његовог крака једнака $a+b$. Сада је из Питагорине теореме

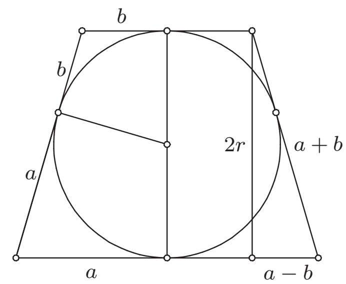
$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + (2r)^2,$$

односно $r^2 = ab$.
Даље, запремина купе је

$$V_K = \frac{2r(a^2+ab+b^2)\pi}{3},$$

а лопте $V_L = \dfrac{4r^3\pi}{3}$, па је однос запремина

$$\frac{V_K}{V_L} = \frac{a^2+ab+b^2}{2r^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{2ab}.$$



ОП 2011 3Б 4

Како је дужина крака трапеза једнака $l = a+b$, то је површина купе $P_K = (a^2+b^2+(a+b)l)\pi = 2(a^2+ab+b^2)\pi$, а површина лопте $P_L = 4r^2\pi = 4ab\pi$, па је однос површина

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{a^2+ab+b^2}{2ab} = \frac{V_K}{V_L},$$

што је и требало доказати.

5. Приметимо да су Аксентије и Милутин очеви, а Милутин и Лаки синови.

Означимо са A исказ „Аксентије говори истину" (тада је $\neg A =$„Аксентије лаже"), са M исказ „Милутин говори истину" и са L исказ „Лаки говори истину". Тада су дате изјаве:

$$\begin{aligned} p &= A \Leftrightarrow M = (A \wedge M) \vee (\neg A \wedge \neg M), \\ q &= M \veebar L = (M \wedge \neg L) \vee (\neg M \wedge L), \\ r &= p \vee q. \end{aligned}$$

Представимо таблицом ове исказе (0 ако је исказ лажан, а 1 ако је истинит), а затим одредимо и истинитосну вредност изјава p, q, r:

A	M	L	p	q	r	
0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	1	1	
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	1	1	$\leftarrow$
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	0	1	

Изјаве p, q, r су дали Аксентије, Милутин и Лаки, па је и њихова истинитосна вредност једнака са A, M, L (не мора тим редоследом!), а видимо да се лева и десна страна поклапају само у 6. врсти (означена стрелицом у претходној таблици).

(а) На основу претходног можемо закључити да Милутин лаже, док Аксентије и Лаки увек говоре истину.

(б) Само за Милутина знамо да је изјавио p.

Четврти разред, Б категорија

1. Функција y је дефинисана за $x \neq 0$ и на области дефинисаности важи

$$y' = \left(e^x - \frac{e^x}{x}\right)' = e^x - \frac{e^x(x-1)}{x^2} = e^x \cdot \frac{x^2-x+1}{x^2},$$

па је

$$xy' + y - xe^x = e^x \cdot \frac{x^2-x+1}{x} + e^x \cdot \frac{x-1}{x} + e^x \cdot x = 0.$$

2. Како је $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 3x$, а из адиционих формула

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\
\sin 3x &= \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x = 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x,
\end{aligned}$$

то је полазна неједначина еквивалента са

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} < 3 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 3 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{3}{4} \cdot \sin 4x.$$

Из последњег је $\sin 4x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, па је скуп решења

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right).$$

3. Видети први задатак за трећи разред Б категорије.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Видети други задатак за трећи разред А категорије.