ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Први разред, А категорија

1. Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар троугла ABC, а G_1, G_2 и G_3 тежишта троуглова HBC, HCA и HAB, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OH}\,.$$

2. На колико начина је могуће распоредити 11 птица у 3 идентична кавеза, тако да сваки кавез садржи бар три птице?

3. Дата је таблица димензије 2010×2011. Одредити максималан број поља који можемо обојити тако да сваки квадрат димензије 2×2 (састављен од поља таблице) садржи највише два обојена поља.

4. За природан број k са $S(k)$ означен је збир његових цифара. Да ли постоје природни бројеви n и m за које важи

$$S(n) \cdot S(n+1) \cdot \ldots \cdot S(n+m) = 2011^{2010}\,?$$

5. Нека су M и P подножја нормала из темена A троугла ABC на симетрале спољашњих углова код темена B и C, редом. Доказати да је дужина дужи MP једнака половини обима троугла ABC.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Други разред, А категорија

1. Дата је једначина
$$4x^2 - (3a+1)x - a - 2 = 0\,.$$

(а) Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да за решења x_1 и x_2 једначине важи
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geqslant \frac{40}{9}\,.$$

(б) За које $a \in \mathbb{R}$ се оба решења једначине налазе у интервалу $(-1, 2)$?

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. Нека су BD и AE висине оштроуглог троугла ABC. Ако је P тачка пресека правих BD и AE, доказати да је
$$AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD\,.$$

4. Колико има подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 50\}$ чији је збир елемената већи од 637?

5. Нека су AM и BN висине оштроуглог троугла ABC ($\sphericalangle ACB \neq 45°$). Тачке K и T изабране су на полуправама MA и NB, редом, тако да важи $MK = MB$ и $NT = NA$. Доказати да је $KT \parallel MN$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Трећи разред, А категорија

1. На табли су написани бројеви $1, 2, \ldots, 30$. Онда су избрисана два броја и написана је њихова разлика (од већег је одузет мањи број). Овај поступак је понављан све док на табли није остао само један број. Одредити парност овог броја.

2. Нека су ABC и $A'B'C'$ троуглови такви да је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' = 60^\circ$. Доказати да је

$$2 \cdot BC \cdot B'C' \geqslant AB \cdot A'B' + CA \cdot C'A'.$$

3. На табли је записан полином $x^2+2010x+2011$. У сваком кораку полином $f(x)$ који је записан на табли можемо заменити полиномом

$$x^2 \cdot f\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ или } (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Да ли после коначно много корака на табли може бити записан полином $x^2+2011x+2010$?

4. Четвороугао $ABCD$ је уписан у круг. На луку CD, који не садржи тачке A и B, налази се произвољна тачка M. Нека дужи MA и MB секу страницу CD у тачкама X и Y, редом. Доказати да однос

$$\frac{DX \cdot CY}{XY}$$

не зависи од положаја тачке M.

5. Дат је низ бројева

$$mp+1,\ mp^3+1,\ mp^5+1, \ldots$$

где је p прост, а m природан број.

(а) Доказати да се у овом низу налази највише један потпун квадрат.

(б) Да ли се у овом низу мора налазити потпун квадрат?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да је функција

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} + 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

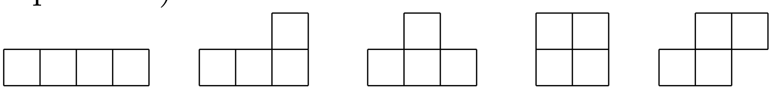
на интервалима у којима је дефинисана константна, а затим наћи вредност ове функције.

2. На страницама AB, BC, CD и DA, правоугаоника $ABCD$, одабране су редом тачке E, F, G и H, тако да је четвороугао $EFGH$ ромб. Ако је $AB = 2$ и $BC = 1$, доказати да је

$$1 \leqslant P < \frac{5}{4},$$

где је P површина ромба $EFGH$.

3. Тетрамино комплет садржи 5 фигурица приказаних на слици (свака тетрамино фигурица има површину 4). Одредити површину највећег квадрата који је могуће поплочати без преклапања, уколико поседујемо 5 тетрамино комплета.
(Није нужно користити свих 25 тетрамино фигурица. Фигурице се могу ротирати и окретати.)



4. Наћи све природне бројеве a и b за које $ab+1$ дели бројеве $a^3 + 3ab^2 + 2$ и $3b^4 - 2b^3 + 3$.

5. У троуглу ABC са R и r означени су, редом, полупречник описаног и уписаног круга, а са l_a, l_b и l_c дужине одсечака симетрала унутрашњих углова. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r}{R}}\,.$$

Испитати када се достиже једнакост.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B ако важи:

1° $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;

2° $A \cap B = \{a\}$;

3° $B \cap \{c, i\} = \emptyset$;

4° $B \setminus A = \{d, e, f, g, h\}$.

2. Дат је скуп $M = \{25, 53, 71, 74\}$ и релација ρ:

$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad$ цифра десетица броја x је мања од цифре јединица броја y.

Направити таблицу релације ρ у скупу M и испитати која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ у скупу M.

3. На колико начина 20 људи може сести на 20 места једног реда у биоскопу, тако да Ана седи поред Бојана, а Весна поред Горана?

4. Познато је да је

$$5^{20} \cdot 20^5 = 30517578{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*},$$

при чему свака звездица представља по једну цифру. Одредити цифре уместо којих се налазе звездице.

5. Дата су пресликавања $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ако је } n \text{ паран} \\ n-1, & \text{ако је } n \text{ непаран} \end{cases} \quad \text{и} \quad g(n) = \begin{cases} 2n, & \text{ако је } n \text{ паран} \\ 3n, & \text{ако је } n \text{ непаран} \end{cases}.$$

(а) Одредити $(f \circ g)(2010)$ и $(g \circ f)(2011)$.

(б) Одредити $(f \circ g)(n)$ и $(g \circ f)(n)$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Други разред, Б категорија

1. Дата је једначина

$$4x^2 - (3a+1)x - a - 2 = 0.$$

(а) Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да за решења x_1 и x_2 једначине важи

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geqslant \frac{40}{9}\,.$$

(б) За које $a \in \mathbb{R}$ се оба решења једначине налазе у интервалу $(-1, 2)$?

2. Нека су m и n произвољни цели бројеви. Доказати да

$$30 \mid (m^5 n - mn^5)\,.$$

3. Одредити све реалне бројеве λ тако да је број

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda+1)i}$$

такође реалан.

4. На колико начина је могуће распоредити 11 птица у 3 идентична кавеза, тако да сваки кавез садржи бар три птице?

5. У унутрашњости троугла ABC изабрана је тачка P тако да важи

$$\sphericalangle APB = \gamma + 50^\circ,\ \sphericalangle BPC = \alpha + 60^\circ,\ \sphericalangle CPA = \beta + 70^\circ,$$

где је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Одредити углове троугла чија су темена пресеци продужетака дужи AP, BP и CP са кружницом описаним око троугла ABC.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Трећи разред , Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + 3t &= 0 \\ 3x + 3y + 2z + mt &= 0 \end{aligned}$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x > 2.$$

4. Око лопте је описана права зарубљена кружна купа. Доказати да је однос запремине лопте и запремине купе једнак односу површине лопте и површине купе.

5. Сваки члан породице Топаловић или увек говори истину или увек лаже. Аксентије, Милутин и Лаки (Милутин је Аксентијев син, а Лаки Милутинов) су дали по једну изјаву везану за њих тројицу:

p: Оба оца или увек говоре истину или оба оца увек лажу.

q: Један син увек лаже, а други син увек говори истину.

r: Изјаве p и q нису обе лажне.

(а) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити да ли говори истину или лаже?

(б) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити коју је изјаву (од p, q, r) дао?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $y = \dfrac{(x-1)e^x}{x}$, доказати да је функција

$$xy' + y - xe^x$$

на интервалима на којима је дефинисана константна.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\cos^3 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin^3 x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) > \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3. Одредити све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + 3t &= 0 \\ 3x + 3y + 2z + mt &= 0 \end{aligned}$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

4. На колико начина је могуће распоредити 11 птица у 3 идентична кавеза, тако да сваки кавез садржи бар три птице?

5. Нека су ABC и $A'B'C'$ троуглови такви да је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' = 60^\circ$. Доказати да је

$$2 \cdot BC \cdot B'C' \geqslant AB \cdot A'B' + CA \cdot C'A'.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.