28. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Јаши, Румунија – 6. мај 2011.

1. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао који није трапез и чије се дијагонале секу у E. Средишта дужи AB и CD су F и G редом, а ℓ је права кроз G паралелна правој AB. Подножја нормала из E на праве ℓ и CD су H и K, редом. Доказати да су праве EF и HK међусобно нормалне.

(Велика Британија)

2. Ако су x, y, z реални бројеви такви да је $x + y + z = 0$, доказати неједнакост

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geqslant 0.$$

Када важи једнакост?

(Грчка)

3. Нека је S коначан скуп природних бројева са следећим својством: ако S садржи број x, онда садржи и све делиоце броја x. Непразан подскуп T скупа S зовемо *добрим* ако је, за све $x, y \in T$ са $x < y$, количник y/x степен простог броја. Непразан подскуп T скупа S је *лош* ако, за ма које $x, y \in T$ са $x < y$, количник y/x није степен простог броја. Једноелементан скуп сматрамо и добрим и лошим. Нека је k највећи могући број елемената доброг подскупа S. Доказати да је k најмањи могући број међусобно дисјунктних лоших скупова са унијом једнаком S.

(Бугарска)

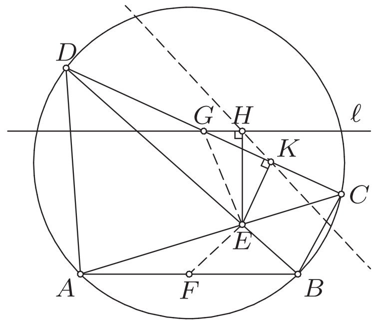
4. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао површине 1 чије су сваке две супротне стране паралелне. Праве AB, CD и EF се секу у паровима, одређујући троугао. Слично, праве BC, DE и FA одређују други троугао. Доказати да бар један од ова два троугла има површину не мању од $\frac{3}{2}$.

(Бугарска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Претпостављамо да је тачка K између G и C. Тачке E, G, H и K су на кругу над пречником EG, па је $\sphericalangle EHK = \sphericalangle EGK$. Пошто су троуглови EAB и EDC слични (због $\sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC$ и $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EDC$), троуглови EFB и EGC су такође слични. Следи да је $\sphericalangle EFB = \sphericalangle CGE = \sphericalangle KHE$, што заједно са $FB \perp HE$ даје $EF \perp KH$.



2. Тражена неједнакост може да се запише као

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geqslant 3.$$

Нека је, без губитка општости, $|z| = \max\{|x|, |y|, |z|\}$. По Коши-Шварцовој неједнакости је

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} \geqslant \frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1} = \frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1} \geqslant \frac{2(1-z)^2}{2z^2+1} = 3 - \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}$$

што је и требало доказати.

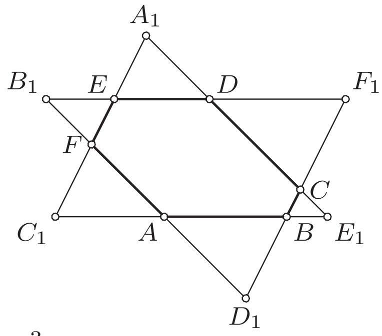
Једнакост важи ако је $x = y = z = 0$ или $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ до на пермутацију.

3. Никоја два елемента доброг скупа са k елемената нису у истом лошем скупу. Зато нам треба бар k лоших скупова да покријемо S.

Конструисаћемо k лоших скупова који покривају S. Нека су $p_1, \ldots, p_n$ сви прости бројеви у S. Како S садржи све делиоце својих елемената, сваки елемент S је облика $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$, где је $r_i \leqslant k-1$ за све i (јер бројеви x/p_i^j, $j = 0, \ldots, r_i$, чине добар подскуп у S са $r_i + 1$ елемената).
За свако такво $x \in S$ дефинишимо $\kappa(x) = r_1 + \cdots + r_n$. Ако $x, y \in S$ $(x < y)$ припадају неком добром скупу, важи $1 \leqslant \kappa(y) - \kappa(x) \leqslant k-1$. Посматрајмо скупове $S_m = \{x \in S \mid \kappa(x) \equiv m \pmod{k}\}$, $m = 1, \ldots, k$. Они су дисјунктни и унија им је цео S, а по претходном је сваки S_m лош, па је то жељена конструкција.

4. Нека праве AB, CD и EF одређују троугао $A_1C_1E_1$, док BC, DE и FA одређују троугао $B_1D_1F_1$ ($CD \cap EF = \{A_1\}$, $DE \cap FA = \{B_1\}$, итд.). Означимо $\frac{AB}{F_1B_1} = a$, $\frac{BC}{A_1C_1} = b$, $\frac{CD}{B_1D_1} = c$, $\frac{DE}{C_1E_1} = d$, $\frac{EF}{D_1F_1} = e$, $\frac{FA}{E_1A_1} = f$. Како је $[ABD_1] = a^2[B_1D_1F_1]$ итд, добијамо $[ABCDEF] = (1 - a^2 - c^2 - e^2)[B_1D_1F_1]$ и $[ABCDEF] = (1 - b^2 - d^2 - f^2)[A_1C_1E_1]$.

Коефицијенти b, d, f се могу изразити преко a, c, e: из $\frac{BC}{EF} = \frac{D_1F_1 - D_1B - CF_1}{EF} = 1 - a - c$ и $\frac{A_1C_1}{EF} = \frac{A_1E + EF + FC_1}{EF} = 2 - a - c - e$ добијамо $b = \frac{1-a-c}{2-a-c-e}$; аналогно $d = \frac{1-c-e}{2-a-c-e}$ и $f = \frac{1-e-a}{2-a-c-e}$. Сада за $a + c + e = p$ имамо $a^2 + c^2 + e^2 \geqslant \frac{1}{3}p^2$ и $b^2 + d^2 + f^2 = \frac{3-4p+p^2+a^2+c^2+e^2}{(2-p)^2} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3-2p}{2-p}\right)^2$.



Претпоставимо да је $[A_1C_1E_1] < \frac{3}{2}$ и $[B_1D_1F_1] < \frac{3}{2}$. По претходном, то је еквивалентно са $a^2 + c^2 + e^2 < \frac{1}{3}$ и $b^2 + d^2 + f^2 < \frac{1}{3}$. Међутим, из прве неједнакости следи $p < 1$, а из друге $\frac{3-2p}{2-p} < 1$, што је немогуће.