Министарство просвете и науке

Шифра: ______________

МД "АРХИМЕДЕС" - Београд

XXXIII МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР (СШ)

Бодови: ______________

21. мај 2011.

I разред СШ (спец.) *Задаци*

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. Одредите скупове A и B (набрајањем елемената), ако се зна да је само једна од следећих формула нетачна:

(1) $A \cap B = \{2,7\}$ (4) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (7) $6 \in A$

(2) $4 \in B$ (5) $5 \in A$ (8) $A \cap B = \{7,9\}$

(3) $3 \in A$ (6) $1 \in B$

Образложење:

Одговор: A= ______________, B = ______________

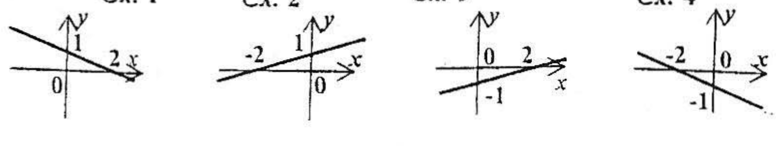
2. Колико је: $2011 \cdot 2011\frac{10}{11} - 2011 \cdot 2010\frac{10}{11}$. Израчунајте на најједноставнији начин.

Место за рад:

Одговор: ______________

3. Која од ових слика приказује график функције $y = -\frac{1}{2}x + 1$?

Сл. 1 Сл. 2 Сл. 3 Сл. 4



Одговор: ______________

4. а) Ако су x и y два неједнака броја ($x \neq y$), различита од 0, при чему важи једнакост $ax = ay$, онда је a једнако: (A) 1 (B) $\frac{x}{y}$ (C) $\frac{y}{x}$ (D) $x - y$ (E) 0

Образложење:

Одговор: ______________

б) Ако праве $ax+3y=15$ и $6x+by=30$ пролазе кроз тачку M(4, −3), колико је $a+b$?

Образложење:

Одговор: ______________

5. *Необичан запис:* ЕУКЛИД·Е·У·К·Л·И·Д

У датом запису реч ЕУКЛИД представља шестоцифрени број. Иста слова замењују исте цифре, а различита слова различите цифре. Докажите да дати производ представља број дељив са 3.

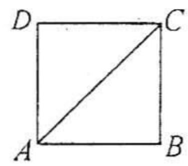
Образложење:

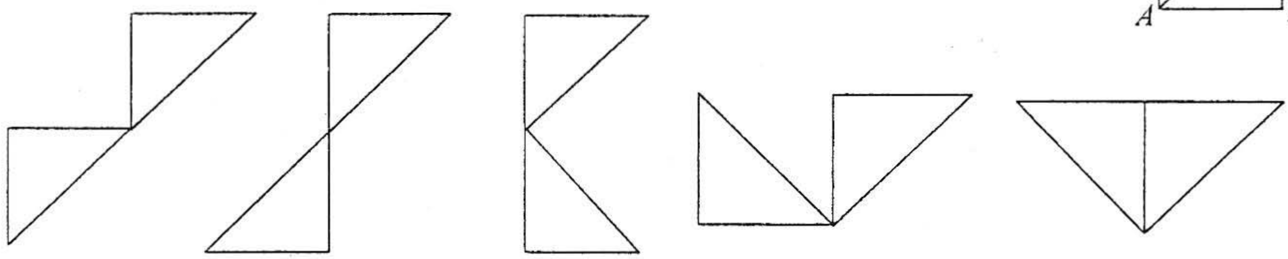
6. У једном правоугаонику збир квадрата све четри странице једнак је 18. Колика је дужина његове дијагонале?

Образложење:

Одговор: ____________

7. Квадрат $ABCD$ смо разрезали по дијагонали AC и онда смо троугао ABC обрнули око тачке A за 270^0 у смеру кретања сатне казаљке. Коју фигуру смо добили? Заокружи слово испод слике која представља тачан одговор!





(A) (B) (C) (D) (E)

Одговор: ____________

8. а) Нека су a и b природни бројеви, такви да је $\frac{a+b}{20a+11b}=\frac{1}{13}$. Одредити $\frac{a}{b}$.

Место за рад:

Одговор: ____________

б) Знамо да је $\frac{2a+b}{b}=9$. Колико је $\frac{7a-8b}{b}$?

Место за рад:

Одговор: ____________

9. а) Решите у скупу целих бројева једначину: $2010x - 2009y = 2011$.

б) Одредите пар најмањих природних бројева који задовољавају ту једначину:

Образложење:

Одговор: **а)** ______________________

б) ______________________

10. Са две гомиле од по 100 камичка два играча на смену (наизменично) узимају камичке, али тако да у једном потезу играч може узети колико год хоће камичака, али само са једне од гомила. Побеђује онај играч који узме и последњи камичак. тј. када после његовог потеза нема више камичака на гомилама.

Који од играча, ако правилно игра, може сигурно победити у овој игри, ма како играо његов противник?

(A) Увек побеђује први

(B) Побеђује први ако у првом потезу узме 5 камичака

(C) Увек побеђује други

(D) Побеђује први ако у првом потезу узме 50 камичка

(E) Немогуће је утврдити

Место за рад:

Одговор: ______________

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. Нека су a и b цели бројеви. Означите да ли је тврђење тачно или нетачно (иза тврђења напишите реч "тачно" или "нетачно"):

A) За ма које a и b је $a+b>a$ .... ______________

B) За свако a и b је $a+b > a-b$ .... ______________

C) За свако a и b важи једнакост $a+b=b+a$ .... ______________

D) Постоје бројеви a и b, такви да важи $a+b > ab$ .... ______________

E) Постоје бројеви a и b, такви да важи $a-b > ab$ .... ______________

F) Постоје бројеви a и b, такви да важи $a+b < b$ .... ______________

G) Постоје бројеви a и b, такви да важи $a+b = a-b$.................... ______________

H) Не постоје бројеви a и b, такви да је $a-b > a+b$ .... ______________

I) Не постоје бројеви a и b, такви да је $a-b = b$ .... ______________

J) Не постоје бројеви a и b, за које је $a+b = ab$.................... ______________

12. Посматрајмо операцију "аритметичка средина" $a*b=\frac{1}{2}(a+b)$ и следећа тврђења:

I $a*(b*c)=(a*b)*c$;

II $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$;

III $a*(b+c)=a*b+a*c$.

Које од тих тврђења је тачно?

Образложење:

Одговор: ______________

13. Дат је правоугли троугао ABC с хипотенузом AB=6. Кружница k додирује AC и BC у тачкама K и L. Тачке M и N , које су дијаметрално супротне тачкама K и L, леже на хипотенузи. Колика је површина дела круга (одсечка) који је изван троугла ABC?

(A) $\frac{1}{2}\pi-1$ (B) $\pi-1$ (C) $2\pi-4$ (D) $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}$ (E) $\pi-2$

Образложење:

Одговор: ______________

14. а) Нацртати график функције: $y=\left|\left|\left|x-4\right|-2\right|-1\right|$

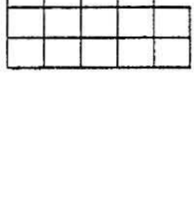
б) Колико решења има једначина $\left|\left|\left|x-4\right|-2\right|-1\right|=a$ у зависности од параметра a?

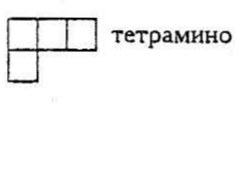
Који је највећи број решења?

Образложење:

Одговор: ______________

15. Јован је фигуру коју видите на слици разрезао на фигурице које називамо тримино и тетрамино (приказане су десно од фигуре). Колико је тримина при том разрезивању могао добити? Прикажите цртежом сваку поделу (разрезивање).





Образложење:

Одговор: ______________

КРАЈ

Министарство просвете и науке
МД "АРХИМЕДЕС" - Београд
XXXIII МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР (СШ)
21. мај 2011.

Шифра:______________

Бодови:______________

II разред СШ (спец)

Решења

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. а) Вредност израза $9^{5t}\cdot 9^{-2t}$ за $t=\frac{1}{6}$ једнака је: A) 2 B) 3 C) 9 D) 81 E) нешто друго

Објашњење: $9^{5t}\cdot 9^{-2t}=9^{3t}=(3^2)^{3t}=3^{6t}=3^{6\cdot\frac{1}{6}}=3^1=3.$

Може и овако: $9^{5t}\cdot 9^{-2t}=9^{3t}=9^{3\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=3^1=3.$

Одговор: B) 3

б) Израз $2^{3a}\cdot 3^{2a}$ једнак је: A) 5^{5a} B) 6^{5a} C) 6^{6a^2} *D*) 64^a E) 72^a

Објашњење: $2^{3a}\cdot 3^{2a}=(2^3)^a\cdot(3^2)^a=8^a\cdot 9^a=72^a.$ *Одговор*: E) 72^a

2. Одредити $\sin\pi x+\cos\pi x$ ако је $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$.

Објашњење:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}\Rightarrow 3^{-x}=3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow -x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$. Тада је: $\sin\pi x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ и

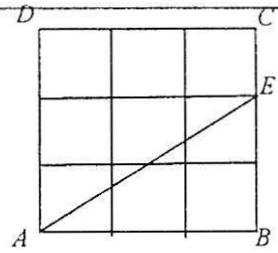
$\cos\pi x=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$, па је $\sin\pi x+\cos\pi x=-1+0=-1.$ *Одговор*: -1

3. Наћи све троуглове чији углови α,β и γ задовољавају релације: $\cos\alpha=\sin\beta$ и $2\cos\beta=\sin\gamma$.
То су:
(A) једнакостранични троуглови
(B) тупоугли с тупим углом 120^0
(C) правоугли с оштрим угловима 30^0 и 60^0
(D) сви правоугли троуглови
(E) нема таквих троуглова

Образложење:
Пошто су α,β и γ углови троугла, сваки је мањи од 180^0, па имамо: $\cos\alpha=\sin\beta=\cos(90^0-\beta)\Rightarrow$ $\alpha=90^0-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=90^0$, а то значи да је трећи угао $\gamma=90^0$, тј. троугао је правоугли. Сада друга од датих релација постаје $2\cos\beta=1$, тј. $\cos\beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=60^0$, а тада је $\alpha=30^0$. Дакле, ради се о правоуглим троугловима с угловима $30^0, 60^0, 90^0$.

Одговор: (C) правоугли с оштрим угловима 30^0 и 60^0

4. Квадрат *ABCD* подељен је на девет једнаких квадрата, као на слици. Ако је $AE=26$ cm, израчунати површину квадрата *ABCD* (у cm^2)



Образложење:
Нека је дужина странице једног малог квадрата x. Тада је $AB^2+BE^2=AE^2$, тј.
$(3x)^2+(2x)^2=26^2\Rightarrow 9x^2+4x^2=676\Rightarrow 13x^2=676\Rightarrow x^2=52.$
Површина квадрата *ABCD* је онда $P=9x^2=9\cdot 52=468$ (cm^2).

Одговор: (D) 468

5. а) Решите једнчину $6 \cdot 3^{\log_3 x} = x + 15$.

Образложење:

Користећи основну логаритамску идентичност $a^{\log_a x} = x$, за $x>0$ добијамо једначину еквивалентну датој: $6x = x + 15$, одакле $x=3$.

Одговор: <u>C) 3</u>

б) Нађите $\log_5 0{,}28$ ако зе зна $\log_5 7 = a$.

Објашњење: $\log_5 0{,}28 = \log_5 \frac{28}{100} = \log_5 \frac{7}{25} = \log_5 7 - \log_5 5^2 = \log_5 7 - 2\log_5 5 = a - 2$.

Одговор: <u>A) $a-2$</u>

6. Која од следећих неједнакости важи за свако $x \in R$?

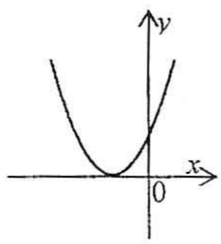
A) $x^2 \geq x$ B) $x^3 \geq x^2$ C) $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ D) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ E) $\sqrt{x} \geq 0$.

Објашњење:

Довољно је навести контрапримере. На пример, A) и B) не важе за $x = \frac{1}{2}$, а неједнакости D) и E) не важе за $x<0$. Само неједнакост C) важи за свако x, јер је: $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$

Одговор: <u>C) $x^2 - 2x + 3 \geq 0$</u>

7. На слици је график функције $y = x^2 + mx + m$. Нађите m!



Образложење:

Први начин.

График (парабола) додирује оцу Ox, па функција има двострtуку нулу.

Дискриминанта даатаог квадратног тринома је $D = m^2 - 4m$ и оиа мора бити једнака нули, тј.

$D = m^2 - 4m \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 4$. Прва вредност отпада, јер $m \neq 0$ и то m 0 (са графика видимо да је за $x=0$ вредност функције једнака m и позитивна).

Према томе, $m = 4$.

Други начин.

Подсетимо се каноничног облика квадратног тринома(функције):

$y = Ax^2 + Bx + C = A(x + \frac{B}{2A})^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} = A(x+\alpha)^2 + \beta$. У нашем задатку је $A=1$, а график додирује осу Ox, *pa je* $\beta=0$ (јер је дискриминанта $D = B^2 - 4AC = 0$). Зато је $y = (x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$, тј. $m = 2\alpha$ и $m = \alpha^2$,

Одатле је $(\frac{m}{2})^2 = m \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 4$. Али, са графика видимо да је $m \neq 0$, тачније $m > 0$, пошто график сече осу Oy у тачки $(0,m)$. Стога је $m=4$.

Одговор: <u>$m = 4$.</u>

8. а) Ако је $a \geq 0, b \geq 0$ и $|a| > b$, онда је $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Доказати!

б) Одредите вредност израза $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

Образложење:

а) *Доказ*

Означимо $x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, па квадрирамо, добићемо:

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} = a \pm 2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}} = a \pm \sqrt{b},$$ па је $x = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ . .

б) I *начин:*

Квадрирамо дати израз и добијамо:

$A^2 = 6+2\sqrt{5} - 2\sqrt{36-20} + 6 - 2\sqrt{5} = 12 - 2 \cdot 4 = 4$, па је $A=2$, јер је $A>0$.

II *начин:*

$$A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(1+2\sqrt{5}\right)+5} - \sqrt{1-2\sqrt{5}+5} = \sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}.$$

Пошто је $1-\sqrt{5} < 0$, биће $A = \left|1+\sqrt{5}\right| - \left|1-\sqrt{5}\right|$ и коначно $A = 1+\sqrt{5} - \left(\sqrt{5}-1\right) = 2$.

III *начин:*

Применимо формулу (доказану под а)) да је $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Имаћемо: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}+1$

$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}-1$,

па је стога $x = \left(\sqrt{5}+1\right) - \left(\sqrt{5}-1\right) = 2$.

Одговор: **б)** $A=2$

9. а) У 15 коњушница расместили су 101 коња. Зашто ће бар у једној коњушници бити непаран број коња?

Образложење:

Задатак ћемо решити методом свођења на противречност. Нека се у свакој коњушници налази паран број коња. Онда е ззбир парних бројева бити паран. А према услову задатка имамо укупно 101 коња – непаран број. На тај начин, дошли смо до противуречности. Значи, бар у једној коњушници биће непаран број коња.

б) Да ли је тачно да се од ма која три цела броја могу изабрати два чији је збир паран?

Образложење:

Пошто бројеви могу да буду парни или непарни, а бројева је свега три, онда , примењујући Дирихлеов принцип, најмање два од њих биће оба парна или оба непарна. И у једном и у другом случају збир тих бројева биће паран. Значи, тврђење је тачно.

10. На столу се налазе две гомиле жетона. На свакој гомили има по 111 жетона. Играју два играча на смену (један па други, наизменично). У једном потезу један играч узима произвољан број жетона (бар један), али само са једне гомиле. Затим игра други играч и тако редом. Победник је играч који са стола узме и последњи жетон. Ко ће победити ако сваки играч игра на најбољи начин: онај играч који игру почиње или онај који игра као други?

(A) Увек побеђује први (B) Увек побеђује други
(C) Не може се утврдити (D) Други никад не може да победи
(E) Први ако у првом потезу узме све жетоне са једне гомиле

Образложење.

У тексту пише да један играч може узети произвољан број жетона са једне гомиле. Размотримо случај када први играч узме све жетоне са једне гомиле. Да ли му то одговара? Наравно да не, јер ће онда други играч узети целу другу гомилу и тако победити.
Дакле, први играч мора да остави на гомили са које узима жетоне бар неки жетон. После тога на столу остају две гомиле са различитим бројем жетона.
У чему је сада мајсторија другог играча? Он прати колико је жетона узео први играч, па онда узима исто толико жетона, али не са исте гомиле, већ са оне друге. Зашто?
Зато што на тај начин он на гомилама поново изједначава број жетона. Сад је опет први играч на потезу. Он се налази пред сличним проблемом као уочи првог потеза. Не сме да узме све жетоне! Колико да узме, колико да остави? Тако ће бити све док први играч не "потроши" све жетоне са једне гомиле, тј. док не узме и последњи жетон са једне гомиле. Другом играчу тада остаје да и он узме последњи жетон са "своје" (друге) гомиле и тако постане победник. Победа другог играча може се објаснити и на следећи начин.
Кад први играч одигра потез, други играч узима онолико жетона колико и први, али никако са исте гомиле са које и први. Други играч у овој игри побеђује ако користи идеју *симетрије*. Симетрија се овде састоји у изједначавању броја жетона на гомилама. Пошто је на почетку број жетона на гомилама био исти, први играч својим потезом ту једнакост нарушава, али онда други играч својим потезом поново изједначава број жетона на гомилама. Завршна позиција такође представља симетричну позицију (једнак број жетона: 0, 0), а њу може постићи само други играч.

Одговор: (B) Увек побеђује други

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. Упростите израз $\sqrt{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+10\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5}$.

Образложење:

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+10\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5}=\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+10\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+5}=\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+25}=$$
$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+5\right)^2}=\left|x^2+\frac{1}{x^2}+5\right|=x^2+\frac{1}{x^2}+5.$$

Одговор: $x^2+\dfrac{1}{x^2}+5$

12. Нека су x_1 и x_2 корени квадратане једначине $2x^2+2mx+m^2-1=0$.

Одредити: а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$

Образложење:

Према Вијетовим формула имамо: $x_1+x_2=-m,\ x_1x_2=\dfrac{m^2-1}{2}$.

а) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-m)^2-2\cdot\dfrac{m^2-1}{2}=m^2-(m^2-1)=1$.

б) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=-m\left[m^2-3\cdot\dfrac{m^2-1}{2}\right]=\dfrac{m}{2}(m^2-3)$

Одговор: **а)** 1 ; **б)** $\dfrac{m}{2}(m^2-3)$

13. Решите једначине $2\sin^2 x=3\cos x$ и утврдите колико решења припада интервалу $\left[-2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right]$?

А) 0 В) 2 С) 4 D) 5 Е) 7

Образложењ :

Дата једначина је еквивалентна са једначином $2(1-\cos^2 x)=3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$ – квадратна једначина по $\cos x$, па имамо $\cos x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{-3\pm 5}{4}\Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}\vee \cos x=-2$. Пошто друга вредност отпада, остаје само $\cos x=\dfrac{1}{2}$, па за x имамо низ вредности $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in Z$ (тј. за $k=0,\pm1,\pm2,\dots$). Од ових безброј решења, датом интервалу припада тачно 5 решења. То су решења : $-\dfrac{5\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}$.

Добијамо их из услова : $-2\pi\le\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\le\dfrac{5\pi}{2}$ и $-2\pi\le-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\le\dfrac{5\pi}{2}$, где $k\in Z$, тј.

$-14\le 12k\le 13$ и $-10\le 12k\le 15$, односно (с обзиром на где $k\in Z$) : $-1\le k\le 1$ и $0\le k\le 1$.

У првом случају (за $k=-1,\ 0,\ 1$) датом интревалу припадају три решења ($-\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}$), а у другом случају (за $k=0,\ k=1$) том интерваалу припадају два решења ($-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$). Дакле, укупно 5 решења.

Одговор: а) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$

б) 5 решења

Напомена : С почетка можемо поступити и мало другачије. Ако ставимо $\cos x=t$, где мора бити $-1\le t\le 1$, дата једначина се своди на $2(1-t^2)=3t$, одакле лако добијамо $(2t-1)(t+2)=0$, одакле је $2t-1=0\vee t+2=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\vee t=-2$. Пошто друга вреност отпада, иммао само $\cos x=\dfrac{1}{2}$ и онда је $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$, с тим што датом интервалу припада сам 5 решења.

14. Може ли дискриминанта квадратног тринома с целим коефијентима да буде једнака 11? А може ли да буде 2011?

Образложење:

За квадратни трином ax^2+bx+c дискриминанта је $D=b^2-4ac$. Нека је $b^2-4ac=11$. Одатле је $b^2=4ac+11=4(ac+2)+3$, тј. b^2 има остатк 3 при дељењу са 4. Међутим, као што знамо, квадрати парних бројева дељиви су са 4, а квадрати непарних имамју остатк 1 при дељењу са 4. Заиста, $(2m)^2=4m^2$, $(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4m(m+1)+1=4k+1$. Број b^2 није тог облика. Према томе, дискриминантаа квадратаног тринома с целим коефицијентима не може бити једнака 23.
Она не може бити ни 2011, јер је $2001=4\cdot 508+3$.

Одговор: Не може

15. Данас (21.5.2011) одржава се 33. екипна математичка олимпијада за СШ. Ученик 2. разреда треба да одреди којом цифром се завршава број:

а) $21^2\cdot 5^2\cdot 2011^2$
б) $2^{21}\cdot 2^5\cdot 2^{2011}$
в) $21^{33}+5^{33}+2011^{33}$
г) $33^{21}+33^5+33^{2011}$
д) 33^{2011}

Одговор: а) 5
б) 2
в) 7
г) 3
д) 7

Образложење:

а) Први начин: $21^2\cdot 5^2\cdot 2011^2=(21\cdot 5\cdot 2011)^2=(\ldots 5)^2=\ldots 5$
Други начин: Последње цифре квадрата 21^2, 5^2, 2011^2 су редом 1, 5, 1, па је тражена цифра она којом се завршава производ $1\cdot 5\cdot 1=5$, тј. цифра 5.

б) Први начин: $2^{21}\cdot 2^5\cdot 2^{2011}=2^{21+5+2011}=2^{2037}=2^{2036+1}=2^{4\cdot 509+1}$. Степени броја 2 завршавају се редом на 2, 4, 8, 6 и даље се ова четворка понавља, па ће се 2^{2037}заварщавати истом цифром као и број 2^1, дакле, цифром 2.
Други начин: Бројеви 2^{21}, 2^5, 2^{2011} завршавају се редом цифрама 2, 2 и 8 (на основу претходне напомене, јер је, на пример: $2^{21}=2^{20+1}$, $2^{2011}=2^{2008+3}$), па ће стога тражена цифра бити последња цифра производа $2\cdot 2\cdot 8=32$, тј. цифра 2.

в) Последње цифре бројева 21^{33}, 5^{33}, 2011^{33} исте су као и последње цифре бројева 1^{33}, 5^{33}, 1^{33}, тј. цифре 1, 5 и 1, па ће тражена последња цифра бити цифра којом се завршава збир $1+5+1=7$, тј. цифра 7.

г) Степени броја 33, као и степени брија 3, завршавају се редом на 3, 9, 7, 1 и даље се та четворка понавља, па пошо је $3^{21}=3^{20}\cdot 3^1$, $3^5=3^4\cdot 3^1$ и $3^{2011}=3^{2008}\cdot 3^3=3^{4\cdot 502}\cdot 3^3$, то ће последње цифре тих степена бити рреедом 3, 3 и 7, а тражена цифра биће последња цифра збира $3+3+7=13$, тј. цифра 3.

д) Број 33^{2011} завршава се истом цифром као и број 3^{2011}, а оvај се сзавршава истом цифром као и број 3^3 (јер је $2011=4\cdot 502+3$), дакле, цифром 7.

КРАЈ

Министарство просвете и науке
МД "АРХИМЕДЕС" - Београд
XXXIII МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР (СШ)
21. мај 2011.

Шифра:______________

Бодови:______________

III разред СШ (спец.)

Решења

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. *Необичан запис*: ЕЛИПСА·Е·Л·И·П·С·А

У датом запису реч ЕЛИПСА представља шестоцифрени број. Иста слова замењују исте цифре, а различита слова различите цифре. Докажите да дати производ представља број дељив са 3.

Образложење:

Као што знамо, за записивање бројева користимо 10 цифара. Ако се међу цифрама броја ЕЛИПСА налази бар једна од цифара 0, 3, 6, 9, онда је производ ЕЛИПСА·Е·Л·И·П·С·А сигурно дељив са 3.
Међутим, ако то није случај, онда су за записивање броја ЕЛИПСА употребљене цифре 1, 2, 4, 5, 7, 8. Збир цифара тога броја тада је 1+2+4+5+7+8=27. Тај број је дељив са 3, што значи да је и број ЕЛИПСА дељив са 3, па је и производ ЕЛИПСА·Е·Л·И·П·С·А дељив са 3.

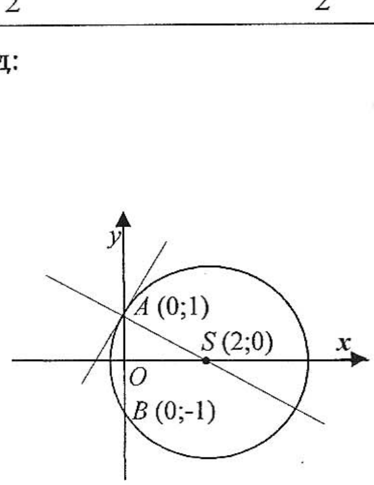
2. Ако су збир, производ и количник реалних бројева x и y једнаки ($x+y=xy=\frac{x}{y}$), онда је $|x-y|$ једнако: (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $1\frac{1}{2}$ (E) нешто друго. Образложите одговор!

Образложење: Да би било $x+y=xy=\frac{x}{y}$ мора бити $y\neq 0$ и такође $x\neq 0$.

Тада је $xy=\frac{x}{y}\Rightarrow xy^2=x\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=1\vee y=-1$. За $y=1$ имамо $x+1=x$, што је немогуће, док за $y=-1$ имамо $x-1=-x$, одакле је $2x=1$, тј. $x=\frac{1}{2}$. Према томе, постоји само један пар таквих бројева: $(x,y)=(\frac{1}{2},-1)$, па је $|x-y|=\left|\frac{1}{2}-(-1)\right|=\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$. Наравно да је $|y-x|=|x-y|=\frac{3}{2}$. *Одговор:* (D) $1\frac{1}{2}$

3. Права $x+2y-2=0$ и кружница $x^2+y^2-4x-1=0$ секу се под углом од:
(A) 30^0 (B) 45^0 (C) 60^0 (D) 75^0 (E) 90^0

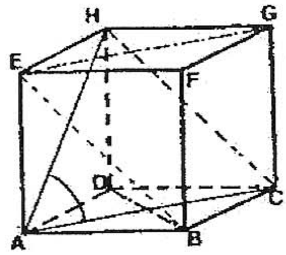
Образложење:



Пошто је $x^2+y^2-4x-1=0\Rightarrow(x-2)^2+y^2=5$, кружница има центар $S(2;\ 0)$ и полупречник $r=\sqrt{5}$. Она сече y-осу у тачкама $A(0;1)$ и $B(0;-1)$, при чему је OA=OB=$r=\sqrt{5}$. Права $x+2y-2=0$ сече координатне осе у тачкама $S(2;\ 0)$ и $A(0;1)$. Угао између кружнице и праве у њиховој пресечној тачки је угао између тангенте на кружну линију и праве у тој тачки. За његово одређивање, у општем случају, потребни су коефицијенти праваца тангенте и праве у њиховој пресечној тачки и онда се примени позната формула за тангенс тог угла. Међутим, у нашем случају, тангента на кружницу у тачки A је нормална на дату праву, јер ова пролази кроз центар кружнице и тачку A. Дакле, тражени угао је 90^0.

Одговор: (E) 90%

4. Колики је угао између дијагонала двеју страна коцке?

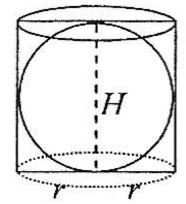


Образложење:

Одговор зависи од тога којим двема странама припадају дијагонале.
Угао може бити 60° (када дијагонале полазе из истог темена), 90° (када су мимоилазне) или 0^0 (када су дијагонале паралелне).

Одговор: 60°, 90° , 0^0 (паралелне)

5. Површина омотача ваљка описаног око лопте површине $P = 12\pi\ \text{cm}^2$ је:
A) $9\pi\ \text{cm}^2$ B) $12\pi\ \text{cm}^2$ C) $15\pi\ \text{cm}^2$ D) $16\ \pi\ \text{cm}^2$ E) $18\pi\ \text{cm}^2$



Образложење:

$P_л = 4r^2\pi;\ 12\pi = 4r^2\pi \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$ (cm)

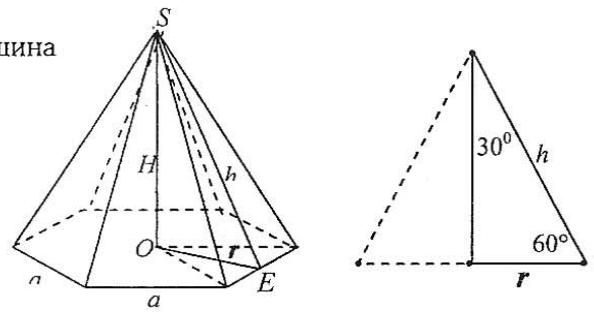
$H=2r \Rightarrow \text{H}=2\sqrt{3}$ (cm); $M\text{в} = 2\text{r}\pi\text{H} = 4\text{r}^2\pi = 12\pi$ (cm^2).

Одговор: B) $12\pi\ \text{cm}^2$

6. Површина основе (базе) правилне n- тостране пирамиде је B=6 cm^2, а нагибни угао бочне стране према основи је 60^0. Колика је површина омотача те пирамиде (у cm^2)?

Објашњење:

Ознаке величина: a — основна ивица, n — број страница многоугла у основи пирамиде, h — апотема, H — висина пирамиде, B — површина основе пирамиде, M — површина омотача пирамиде.
Како ΔOES представља половину једнакостраничног троугла — због услова о нагибу бочне стране) имамо:



$h = 2r,\ B = n\cdot\dfrac{1}{2}ar = \dfrac{1}{2}nar \Rightarrow nar = 2B = 12\,\text{cm}^2$, па је:

$M = n\cdot\dfrac{1}{2}ah = n\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot 2r = nar = 2B = 12\ \text{cm}^2$

Одговор: $M = 12\ \text{cm}^2$

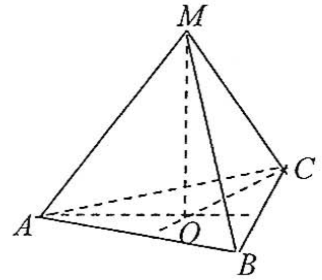
7. Бројеви $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{b+c}$ образују аритметичку прогресију. Докажите да бројеви a^2, b^2 и c^2 такође образују аритметичку прогресију.

Доказ:

Према услову је $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{2}{a+c}$, тј. $\dfrac{a+c+2b}{(a+b)(b+c)} = \dfrac{2}{a+c}$. Када обе стране помножимо са $(a+b)(b+c)(a+c)$ и сведемо сличне чланове, добићемо: $a^2 + c^2 = b^2$, што је и требало доказати.

8. Кроз ортоцентар O једнакостраничног троугла ABC подигнута је нормала OM на раван троугла ABC. Зна се да је $MA = 4\sqrt{3}$ cm и AB=6 cm. Колико је тачка M удаљена од равни троугла ABC? (A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 4 (E) 6

Образложење:



Троугао AHM је правоугли. Његова хипотенуза је $MA = 4\sqrt{3}$, а једна катета је $AO = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, при чему је $a = 6$. Тражи се MO, тј. друга катета тог троугла. Применом Питагорине теореме добијамо MO=6 cm. Видети слику!

Одговор: 6 cm

9. Поред сваке од датих једначина напиши (на црти с десне стране) назив линије (графика) који она представља (дефинише) у координатнојн равни xOy:

(1) $y = -2x$ .... права

(2) $y^2 = 8x$ .... парабола

(3) $x^2 - 4x = 2y$ .... парабола

(4) $x^2 + y^2 = 5$ .... кружница

(5) $xy = 6$ .... хипербола

10. На столу се налазе две гомиле жетона: на једној 33, а на другој 40 жетона. Играју два играча - први и други. У једном потезу играч може узети ма који број жетона (бар један), али само са једне од гомила. Играчи узимају жетоне наизменично. Побеђује играч који узме и последњи жетон са стола. Који играч при правилној игри побеђује?

(A) Увек побеђује други
(B) Други, ако у првом потезу узме 10 жетона са прве гомиле
(C) Други, ако у првом потезу узме све жетона са друге гомиле
(D) Други, ако у првом потезу узме 10 жетона са било које гомиле
(E) Увек побеђује први играч

Образложење:

Ово је игра у којој, при правилној игри оба играча, увек побеђује први играч, тако што сваким својим потезом изједначава број жетона на обе гомиле. Дакле, у свом првом потезу први играч треба да узме 7 жетона. (Погледајте решење задатка број 10 у 4. разреду.). Другим речима, ово је игра у којој играч који игра као други увек губи ако први правилно игра

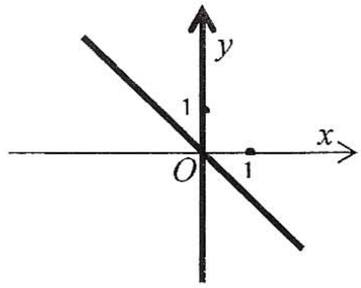
Одговор: (E) Увек побеђује први играч

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. а) Шта је график функције $x^2 + xy = 0$?

(A) права (B) кружница (C) две праве (D) тачка (E) празан скуп

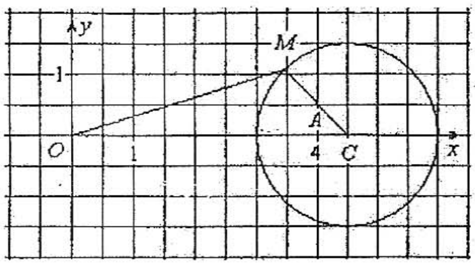
Образложење:



$x^2 + xy = 0 \Rightarrow x(x+y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x + y = 0$, па је график унија двеју правих, од којих је једна права y-оса, а друга права је симетрала II и IV квадранта

Одговор: (C) две праве.

б) У правоуглом координатном систему xOy дата је тачка $A(4;0)$. Докажите да скуп свих тачака M координатне равни, за које важи једнакост $OM=3\cdot AM$, представља кружницу. Одредите њену једначину, координате центра и полупречник.



Објашњење: Нека су бројеви x и y координате тачке M, тј. $M(x,y)$. Пошто је $OM=3\cdot AM$, имаћемо

$$OM^2 = (3AM)^2,\ \text{тј.}\ x^2 + y^2 = 9((x-4)^2 + y^2). \qquad (1)$$

Напишимо ту једначину у облику: $(x-4{,}5)^2 + y^2 = 1{,}5^2$ – једначина кружнице. (2)

Ова једначина значи да све тачке M, које задовољавају услов $OM=3\cdot AM$, припадају кружници с центром $C(4{,}5;0)$ и полупречником $r = 1{,}5$.

Тачно је обрнуто тврђење, тј. ако тачка $M\ (x,y)$ припада кружници с центром $C(4{,}5;0)$ и полупречником 1,5, онда њене координате задовољавају једначину (2) из које следи тачност једнакости (1) и испуњеност услова $OM=3\cdot AM$. Према томе, тражено геометријско место тачаака M јесте кружница с центром C(4,5;0) и полупречником 1,5.

12. Нека је m природан број. Познато је да систем једначина $13x + 11y = 700$ и $y = mx - 1$ има целобројна решења. Одредите m.

Образложење:

Нека је (x, y) целобројно решење. Тада из датих једначина добијамо:

$13x + 11(mx-1) = 700 \Rightarrow (13+11m)x = 711 = 9\cdot 79$. Пошто је 79 прост број, а $13+11m > 9$, то је или $13+11m = 711$, или $13+11m = 79\cdot 3 = 237$, или $13+11m = 79$, одакле имамо редом:

$11m = 698$, $11m = 224$, $11m = 66$. Међутим, само у трећем случају m је цео број, $m=6$. Провера показује да за $m=6$ систем заиста има као решење пар целих бројева.

Према томе, тачан одговор је $m = 6$.

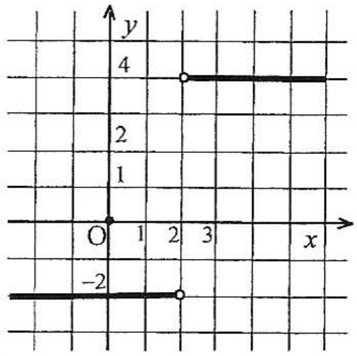
Одговор: Само $m=6$

13. За растућу аритметичку прогресију $\{a_н\}$ знамо да је $a_1+a_2+ \ldots +a_{10}=140$ и $a_2a_9=147$. Чему је једнако a_3?

Место за рад:

Из $140= a_1+a_2+ \ldots +a_{10}=5(a_1+a_{10})=5(a_2+a_9)$ добијамо $a_2+a_9=140:5=28$. Сада из система једначина $a_2+a_9=28 \wedge a_2a_9=147$ добијамо $a_2=7$ и $a_9=21$. Пошто је $a_9=a_1+8d=a_2+7d$, то је у нашем случају $21=7+7d$, одакле је разлика прогресије $d=2$, па је $a_3=a_2+d=7+2=9$. Одговор: $a_3=9$

14. Нацртајте график функције $y=\dfrac{3|x-2|}{x-2}+1$.



Образложење:

Област допуштених вредности за x је $x \neq 2$,
тј. израз који дефинише функцију има смисла за све x, осим за $x=2$.

За $x>2$ функција се своди на $y=\dfrac{3(x-2)}{x-2}+1=3+1=4$, тј. $y=4$,

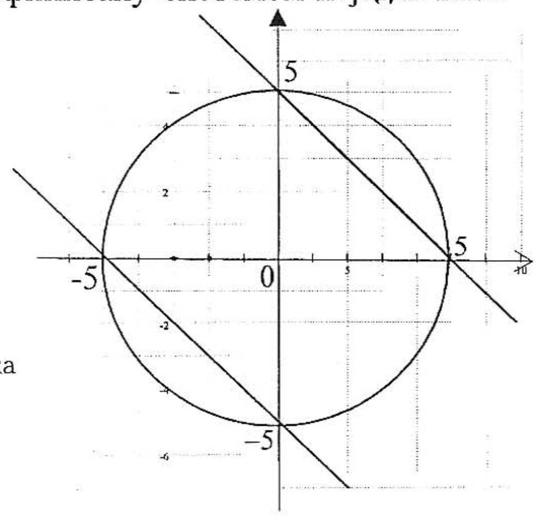
А за $x<2$ имамо $y=\dfrac{-3(x-2)}{x-2}+1=-3+1=-2$, тј. $y=-2$.

График је је приказан на цртежу: то су две паралене полуправе без почетних тачака.

15. а) У координарној равни xOy прикажи графички област дефинисану системом неједначина.

$$x^2+y^2 \leq 25 \leq (x+y)^2 ?$$

б) Колико целобројних решења има тај систем неједначина?



Образложења:

а) Прва неједначина $x^2+y^2 \leq 25$ дефинише круг (кружница и све тачке у њој), а друга неједначина $(x+y)^2 \geq 25$, тј. $|x+y| \geq 5 \Leftrightarrow x+y<-5 \vee x+y>5$, дефинише област ван траке коју одређују праве $x+y=\pm 5$. Према томе, систем од те две неједначине одређује део круга који је ван поменуте траке, а то су два кружна одсечка у I и III квадранту. Заиста, трећа неједначина $x^2+y^2 \leq (x+y)^2$, која се своди на неједначину $xy \geq 0$, дефинише I и III квадрант (област где су обе координате истог знака). На слици је тражена област осенчена (унија два кружна одсечка).

б) Целобројна решења за (x,y) са ненегативним вредностима за x и y су: (0;5), (1;4), (2;3), (2;4); (3;2), (3;3), (3;4), (4;1), (4;2), (4;3), (5;0). Има још толико (11) решења за (x,y) са непозитивним вредностима. Дакле, свега има 11+11=22 решења, тј. толико тачака са целобројним координатама које припадају осенченим кружним одсечцима, што се лако проверава на слици.

Одговор: **а)** Два кружна одсечка (видети слику)

б) 22 целобројна решења

КРАЈ

Министарство просвете и науке
МД "АРХИМЕДЕС" - Београд
XXXIII МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР (СШ)
21. мај 2011.

Шифра:__________

Бодови:__________

IV разред СШ (спец) Решења

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. За свако $x \in R$ опадајућа је функција:

(A) $y = 2x - 3$ (B) $y = -3x + 1$ (C) $y = 2x^2$ (D) $y = \frac{1}{x}$ (E) $y = -x^2 + 8x - 16$

Образложење:
График помаже! Зато, замислите или још боље, скицирајте графике датих функција.

Одговор: (B) $y = -3x + 1$

2. Ако је x позитиван ирационалан број, а y рационалан број, који од следећих бројева је сигурно ирационалан?

(A) $x+y$ (B) xy (C) $\ln x$ (D) x^y (D) ниједан од наведених

Образложење:
Ако би реалан број $z=x+y$ био рационалан, онда би и $x=z-y$ био рационалан. Противречност. Значи, z је ирационално. Одговори (B) и (D) не важе за $y=0$, а одговор (C) не важи за $x=e$.

Одговор: (A) $x+y$

3. Решите једначину: $\frac{x^2-4}{x-2} = 2x$.

Образложење:

За $x = 2$ именилац разломка постаје једнак 0, па се једначина своди на $\frac{0}{0} = 2$! Нулом се не дели!

За $x \neq 2$ једначина постаје $x + 2 = 2x$, одакле је $x = 2$, што противречи условy $x \neq 2$

Одговор: Једначина нема решења.

4. За коју вредност x разломак $\frac{x^2}{x^2+1}$ има најмању вредност? Колика је она? (Урадити без извода!)

Образложење:
Написаћемо дати разломак у следећем облику (издвајање целог дела):

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Добијена разлика ће бити утолико мања уколико буде већи умањилац $\frac{1}{1+x^2}$. Овај разломак ће бити највећи када му је именилац најмањи, а то ће бити за $x=0$, па је тада вредност разломка 0.

5. *Необичан запис*: У запису Д·Е·К·А·Р·Т·ДЕКАРТ реч ДЕКАРТ представља шестоцифрени број. Иста слова замењују исте цифре, а различита слова различите цифре. Докажите да дати производ представља број дељив са 3.

Образложење:
Као што знамо, за записивање бројева користимо 10 цифара. Ако се међу цифрама броја ДЕКАРТ налази бар

једна од цифара 0, 3, 6, 9, онда је производ Д·Е·К·А·Р·Т·ДЕКАРТ сигурно дељив са 3.
Међутим, ако то није случај, онда су за записивање броја ДЕКАРТ употребљене цифре 1, 2, 4, 5, 7, 8. Збир цифара тога броја тада је 1+2+4+5+7+8=27. Тај број је дељив са 3, што значи да је и број ДЕКАРТ дељив са 3, па је и производ Д·Е·К·А·Р·Т·ДЕКАРТ дељив са 3.

6. На питање, који је број његовог стана у солитеру, Васа је одговорио: "Ако се саберу свих шест двоцифрених бројева који се могу образовати (написати) од цифара броја стана, онда ће половина добијеног збира и бити број мог стана". Који је број Васиног стана?

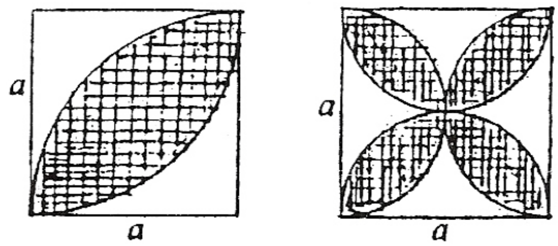
Образложење:

Број Васиног стана је троцифрен, са различитим цифрама (јер се само тада од њих може образовати шест двоцифрених броејева).

Нека је $\overline{abc}$ број Васиног стана. Тада ће збир шест двоцифрених бројева бити једнак:
$\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb}=22(a+b+c)$. Према томе, број Васиног стана је $11(a+b+c)$, где су a, b и c различите цифре. Тада из једначине $100a+10b+c=11(a+b+c)$ добијамо $89a=b+10c$. Број на десној страни је двоцифрен (јер су b и c цифре), а цифра a не може бити нула. Према томе, мора бити a=1, а онда је b=9 и c=8, па је број Васиног стана 198.

Одговор: 198

7. Упоредити површине осенчених фигура (сочиво, латица) на слици. Квадрати су једнаки.



Објашњење: Нека је a дужина странице квадрата.

1. Површину осенченог дела левог квадрата ("сочиво") добићемо ако од збира површина двају сектора (полупречника a) одузмемо површину квадрата (странице a):

$$2\cdot\frac{\pi a^2}{4}-a^2=\frac{\pi a^2}{2}-a^2=\frac{a^2(\pi-2)}{2}.$$

2. Површину осенченог дела десног квадрата (четири "латице") добићемо ако од збира површина четири полукруга (пречника a) одузмено површину квадрата странице a:

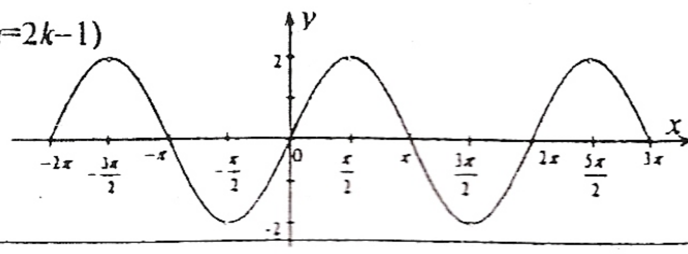
$$4\cdot\frac{\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}-a^2=\frac{\pi a^2}{2}-a^2=\frac{a^2(\pi-2)}{2}.$$

Одговор: Површине фигура су једнаке

8. Нацртајте график функције $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$.

Образложење:

После трансформације разломка $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ добијамо $y=2\sin x$, $x\neq\dfrac{n\pi}{2}$, при чему је n непаран број. График те функције састоји се из свих тачака графика функције $y=2\sin x$ без тачака локалног максимума и минимума, тј. тачака чије су апсцисе $x=\dfrac{n\pi}{2}$, где је n непаран цео број (n=2k−1)



9. Утврдити колико има истинитих међу следећим тврђењима:

а) Функција $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ дефинисана је за свако $x \in R$.

б) Функција $y = 1 + (x-1)^2$ нема нула.

в) Функција $y = |x+1|$ је растућа на читавој области дефинисаности.

г) Функција $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ има минимум.

д) Функција $y = \log|x|$ има само позитивне вредности.

Истинитих тврђења има:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

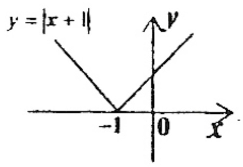
Обавезно образложити одговор!

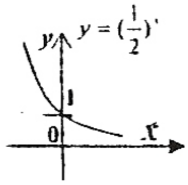
Образложење: Тачна су само тврђење а) и б).

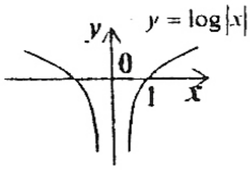
Заиста: $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ - постоји за свако x.

$y = 1 + (x-1)^2 \geq 1$ за свако x.

Да се уверимо да остали искази нису тачни, најбоље је скицирати одговарајуће графике.







Одговор: <u>C) 2.</u>

10. На столу се налазе две гомиле палидрваца: у једној 33, у другој 100 палидрваца. Два играча узимају палидрвца наизменично. У једном потезу играч може узети ма који број палидрваца, али само са једне од гомила (по свом избору). Губи играч који не може да одигра потез (јер на столу нема више палидрваца). Ко ће у овој игри победити (тј. узети последње палидрвце) ако правилно игра?

(A) Увек побеђује први

(B) Други, ако у првом потезу узме 1 палидрвце са било које гомиле

(C) Други, ако у првом потезу узме 3 палидрвца са прве гомиле

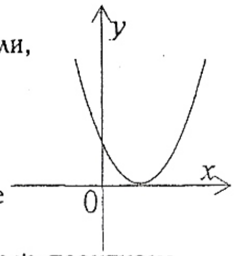
(D) Други, ако у првом потезу узме 33 палидрвца са друге гомиле

(E) Увек побеђује други

Одговор: (A) Увек побеђује први (онај који игру почиње)

Први играч може гарантовано да победи ако у почетку изравна број палидрваца у гомилама. Он то може да уради на тај начин што ће узети 67 палидрвца са гомиле у којој има више палидрваца. После тога он понавља потез свог противника, али тако што палидрвца узима са оне гомиле са које није узимао његов противник (у свом претходном потезу). На тај начин први стално изједначава број палидрваца на гомилама. (Играч који је на потезу када су пред њим две гомиле са истим бројем палидрваца губи партију).

Погледајте задатак број 10 за 2 разред!



*Образложење: Први начин.*График (парабола) додирује осу Ox, па функција има двоструку нулу и то позитивну. Дискриминанта даатог квадратног тринома је $D = a^2 - 4a$ и оиа мора бити једнака нули, тј. $D = a^2 - 4a \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 4$. Прва вредност отпада, јер $a \neq 0$ и то $a > 0$ (са графика видимо да је за $x=0$ вредност функције једнака a и позитивна). Према томе, $a = 4$. Међутим, тада функција гласи $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ и теме параболе је $T(-2, 0)$, ато не одговара графаику (параболи) на слици, јер је апсциса темена те параболе позитивна. Према томе, не постоји таква вредност за a која би одговарала датом графику

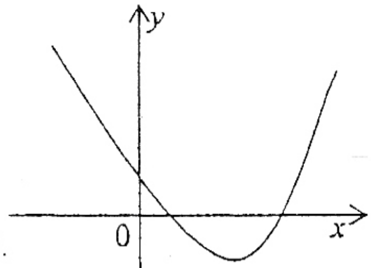
То можемо закључити и на други начин. Наиме, са слике видимо да је апсциса темена параболе позитивна, $-\dfrac{a}{2} > 0$, одакле је $a<0$, те не може бити $a = 4$.

Други начин. Подсетимо се каноничног облика квадратног тринома(функције):

$y = Ax^2 + Bx + C = A(x + \dfrac{B}{2A})^2 + \dfrac{4AC - B^2}{4A} = A(x+\alpha)^2 + \beta$. У нашем задатку је $A=1$, а график додирује осу Ox, па је $\beta=0$ (јер је дискриминанта $D = B^2 - 4AC = 0$). Зато је $y = (x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$, тј. $a = 2\alpha$ и $a = \alpha^2$, Одатле је $(\dfrac{a}{2})^2 = a \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 4$. Али, са графика видимо да је $a \neq 0$, тачније $a > 0$, пошто график сече осу Oy у тачки $(0, a)$. Стога је $a=4$. Као и у првом начину, лако се показује да та вредност отпада (апсциса темена параболе је позитивна, тј. $-\dfrac{a}{2} > 0$, па мора бити $a<0$).

(Погледајте 7. задатак за други разред). *Одговор:* <u>Не постоји таква вредност за a</u>

б) Дат је график функције $y = ax^4 - x^2 + bx + c$ (в. сл.).
Одредите знаке бројева a, b и c.



Објашњење: При $x \to \pm\infty$, $y \to +\infty$, па је $a > 0$. График сече ординатну осу у тачки с позитивном ординатом, значи, $y(0) = c > 0$. У тој истој тачки функција опада, што значи да је $y'(0) < 0$. Међутим, $y' = 4ax^3 - 2x + b$, те је $y'(0) = b < 0$.

Одговор: $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

12. а) Бројеви $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{b+c}$ образују аритметичку прогресију. Докажите да бројеви a^2, b^2 и c^2 такође образују аритметичку прогресију.

Доказ: Према услову је $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{2}{a+c}$, тј. $\dfrac{a+c+2b}{(a+b)(b+c)} = \dfrac{2}{a+c}$. Када обе стране помножимо са $(a+b)(b+c)(a+c)$ и сведемо сличне чланове, добићемо: $a^2 + c^2 = b^2$, што је и требало доказати.

б) Нека је S_1 збир првих n чланова аритметичке прогресије 8, 12, 16, …, а S_2 збир првих n чланова аритметичке прогресије 17, 18, 19, ….. За коју вредност n је $S_1 = S_2$?

Образложење: Сетимо се Гауса: $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Лако налазимо: $S_1 = 8 + 12 + 16 + \ldots + (4+4n) = \dfrac{n(12+4n)}{2}$ и $S_2 = 17 + 118 + 19 + \ldots + (16+n) = \dfrac{n(33+n)}{2}$.

Једнакост $S_1 = S_2$ ће важити само када је $\dfrac{n(12+4n)}{2} = \dfrac{n(33+n)}{2}$, тј. $n(12+4n) = n(33+n)$. (*)

Пошто је $n \neq 0$, имаћемо $12 + 4n = 33 + n$, одакле је $n = 7$.

Наравно, једначина (*) се своди на квадратну једначину $3n^2 - 21n = 0$, тј. $n(n-7) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 7$, али прва вредност отпада (јер је $n \neq 0$), па је тражена вредност само $n = 7$. *Одговор:* $n=7$.

13. Одрдити збир целобројних вредности параметра a за које једначина $x^3 - x = a(x^3 + x)$. има тачно три реална корена.

А) -7 B) 0 C) 1 D) 11 E) нема такаве вредности

Објашњење: Очигледно је да дата једначина има корен $x=0$. *Одговор:* <u>B) 0</u>

За $x \neq 0$ једначина је еквивалента са једначином $(1-a)x^2 = a+1$, а из ове једначине за $a \neq 1$ добијамо еквиваленту једначину $x^2 = \dfrac{a+1}{1-a}$, која има два реална корена само када је $\dfrac{a+1}{1-a} \geq 0$, тј. када је $(a+1)(a-1) \leq 0 \Rightarrow -1 < a < 1$. У овом интерваалу само је једна целобројна вредност: $a = 0$.

14. Бројеви a, b и c су такви да изрази $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$ и $\frac{c+a}{b}$ имају исту вредност. Коју? Има ли можда и више од једне вредности?

Образложење: Први начин. Нека је $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=x$. Тада је: $a+b=cx$, $b+c=ax$, $c+a=bx$.

Ако саберемо ове једнакости, добићемо: $2(a+b+c)=(a+b+c)x$. Ова једнакост биће тачна у два случаја: 1) ако је $a+b+c\neq 0$, онда је $x=2$; 2) ако је $a+b+c=0$, онда је $x=\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$.

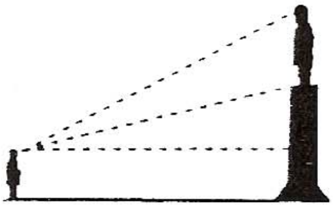
Други начин: Пишемо низ једнакости:

$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{c}+1=\frac{b+c}{a}+1=\frac{c+a}{b}+1\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{c}=\frac{b+c+a}{a}=\frac{c+a+b}{b}$. Ове последње једнакости биће испуњене, ако је: $a+b+c\neq 0$ и $a=b=c$, или ако је $a+b+c=0$

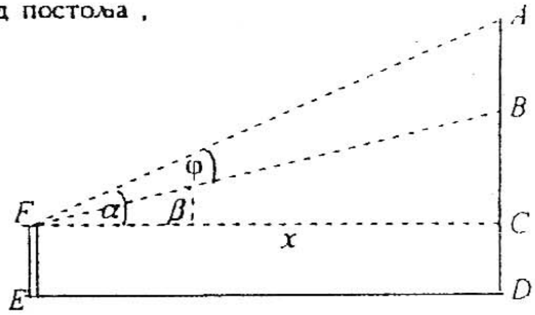
Ако редом заменимо добијене резултате у ма који од датих израза, добићемо да је тражена вредност 2 или -1.

Одговор: <u>2 или −1</u>

15. Статуа (кип) висине 2 m налази се на постољу високом 3,2 m. На којем растојању од основе постоља треба да стоји посматрач, висок 1,6 m, да би стату видео под највећим углом? Ширину основе постоља занемарити.



Образложење: На слици статуу представља дуж AB, постоље – дуж BD.



Нека се посматрач (представља га дуж EF) налази на растојању x m од постоља, тј. $FC=x$. Означимо: $\angle AFC=\alpha$, $\angle BFC=\beta$, $\angle BFA=\varphi$,

Треба наћи такву вредност x за коју је $\angle AFB=\varphi=\alpha-\beta$ највећи.

Пошто у интервалу $(0^0, 90^0)$ тангенс расте, онда ће угао $\alpha-\beta$ имати највећу вредност за ону вредност x за коју највећу вредност има и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

Пошто је $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AC}{FC}=\frac{2+3{,}2-1{,}6}{x}=\frac{3{,}6}{x}$

и $\operatorname{tg}\beta=\frac{BC}{FC}=\frac{3{,}2-1{,}6}{x}=\frac{1{,}6}{x}$, имаћемо (после замене и сређивања):

$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{2x}{x^2+5{,}76}$. Посматрајмо функцију $y=f(x)=\frac{2x}{x^2+5{,}76}$ на интервалу $(0,+\infty)$. Треба да нађемо за коју вредност x она има најмању вредност (минимум). То се може учинити на неколико начина (зависно од методе и "алатке" коју користимо).

<u>*Први начин*</u> (најједноставнији). Подесимо израз за y тако да се променљива јавља само у имениоцу. Ради тога поделимо бројилац и именилац са x (то је допуштено, јер је $x>0$): $y=f(x)=\frac{2}{x+\frac{5{,}76}{x}}$. Израз за y (као разломак са константним бројиоцем) имаће највећу вредност (max), када израз у имениоцу (означимо га за z) има најмању вредност (min). Дакле, прво тражимо за које x функција $z=x+\frac{5{,}76}{x}$ има најмању вредност.

То такође можемо урадити на разне начине, користећи чињеницу да је производ сабирака x и $\frac{5{,}76}{x}$ сталан (константа), тј. $x\cdot\frac{5{,}76}{x}=5{,}76$. Тада је, као што знамо, њихов збир (то је овде z) најмањи (min) када су они међусобно једнаки, тј. када је $x=\frac{5{,}76}{x}\Rightarrow x^2=5{,}76\Rightarrow x=2{,}4$ (друга вредност -2,4 отпада, јер је $x>0$).

Уколико се не позивамо на поменуту теорему о минимуму збира при датом производу (важи и теорема о максимуму производа при сталном збиру), можемо директно применити познате чињенице (теореме) на основу којих се и поменуте теореме могу доказати. На пример, искористићемо познату неједнакост између аритметичке и геометријске средине: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ за свако $a>0$ и $b>0$, при чему *једнакост важи тада и само тада када је* $a=b$. У нашем случају, применићемо ту неједнакост на бројеве x и $\frac{5{,}76}{x}$, па ћемо имати:

$\frac{x+\frac{5{,}76}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{5{,}76}{x}}$, што даје $\frac{z}{2} \geq \sqrt{5{,}76} \Rightarrow \frac{z}{2} \geq 2{,}4 \Rightarrow z \geq 4{,}8$. Ово, пак, значи да је $\min z = 4{,}8$ и то само када је $x = \frac{5{,}76}{x}$, тј. за $x=2{,}4$

Тако смо нашли екстремну вреност (овде минимум) помоћне функције $z = x + \frac{5{,}76}{x}$, тј. да је $\min z = 4{,}8$ za $x=2{,}4$. Сада се лако налази и екстремна вредност (у нашем случају максимум) функције

$y = \frac{2}{x+\frac{5{,}76}{x}} = \frac{2}{z}$. Имаћемо $\max y = \max \frac{2}{z} = \frac{2}{\min z} = \frac{2}{4{,}8} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$,

што се постиже, као што смо видели, за $x = 2{,}4$.

И тако, задатак се своди на тражење за које x функција $z = x + \frac{5{,}76}{x}$ има минимум, односно функција $y = \frac{2}{z}$ - максимум.

Други начин

У првом начину користили смо неједнакост A≥G.

Међутим, могли смо да користимо и ову корисну формулу: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, с тим да уместо a и b ставимо сабирке из израза за нашу помоћну функцију z, дакле: $(x+\frac{5{,}76}{x})^2 = (x-\frac{5{,}76}{x})^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{5{,}76}{x}$, па је даље $z^2 = (x-\frac{5{,}76}{x})^2 + 4 \cdot 5{,}76$. Пошто је $(x-\frac{5{,}76}{x})^2 + 4 \cdot 5{,}76 \geq 4 \cdot 5{,}76$ за свако $x \in R$, то, другачије речено и написано, значи да је $\min z^2 = \min\left[(x-\frac{5{,}76}{x})^2 + 4 \cdot 5{,}76)\right] = 4 \cdot 5{,}76 = 23{,}04$, тј. $\min z = 2 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$ и да се то постиже само када нема сабирка $(x-\frac{5{,}76}{x})^2$, тј. када је $x - \frac{5{,}76}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = 5{,}76 \Rightarrow x = 2{,}4$ (јер $x>0$). Наравно, сада је лако наћи и $\max y$.

Трећи начин.

Наравно, за тражење екстремне вредности функције $y = f(x) = \frac{2x}{x^2+5{,}76}$ може се користити и извод функције. Имаћемо: $y' = f'(x) = \frac{(2x)' \cdot (x^2+5{,}76) - 2x \cdot (x^2+5{,}76)'}{(x^2+5{,}76)^2} = \frac{2x^2+11{,}52-4x^2}{(x^2+5{,}76)^2} = \frac{2(5{,}76-x^2)}{(x^2+5{,}76)^2}$.

Извод $f'(x)$ постоји за све вредности x из интревала $(0, +\infty)$, а једнак је нули за $5{,}76 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 5{,}76 \Rightarrow x = 2{,}4$, тј. у тачки $x = 2{,}4$ и то је јединствена критична тачка функције на интерваалу $(0, +\infty)$. Пошто је $f'(x) > 0$ за $0<x<2{,}4$, а $f'(x) < 0$ за $x>2{,}4$, то значи да је $x=2{,}4$ тачка у којој функција има максимум (локални). Та тачка је јединствена. Слева од ње функција расте, а сдесна опада, па зато у тој тачки функција постиже своју највећу вредност. Компликовано, зар не!?

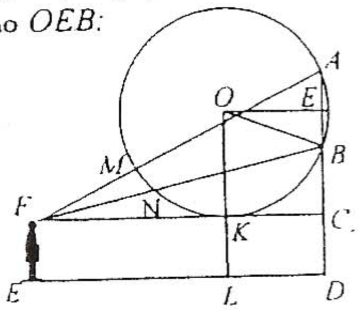
Према томе, посматрач ће видети статуу под највећим углом ако стане на растојању 2,4 m од постоља статуе.

Четврти начин

Овај начин је предложио (смислио) проф. И. Ф. Шаригин, познати руски писац уџбеника геометрије. Користи се искључивпо геометрија.

Нацртајмо кружницу која пролази кроз тачке A и B и додирује прааву FC. Као што се са слике види, посматрач се налази на растојању (од постоља) које је веће од растојања KC. У том случају угао AFB, који

граде две сечице, једнак је полуразлици углова који одговарају кружним луковима AB и MH.
Ако се посматрач приближи основи постоља на растојање мање од растојаања KC, онда ће угао под којим се види статуа опет бити једнак полуразлици углова припадајућих кружних лукова. Очигледно, угао под којим се види статуа (видни угао) биће највећи када се око посматрача буде налазило у додирној тачки К кружнице и праве FC, јер се у том случају тај угао мери само само половином угла који одговара луку AB
.Тражено растојање ћемо израчунати применом Питагорине теореме на троугао OEB:



$$OE^2 = OB^2 - BE^2 = OK^2 - (\frac{AB}{2})^2 = (3{,}2 + 1 - 1{,}6)^2 - 1^2 = 5{,}76.$$

Тада је OE=2,4 m, тј. посматрач треба да стане на растојању 2,4 m од основе постоља

Одговор: $x = 2{,}4$ m

КРАЈ