СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Ниш, 06.04.2010.

Први дан

1. Неки од n градова су повезани авионским линијама (све линије су двосмерне). Постоји тачно m линија. Нека је d_i број линија које полазе из града i, за $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако је $1 \leqslant d_i \leqslant 2010$, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, доказати да важи

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 \leqslant 4022m - 2010n.$$

Одредити све n за које може да се достигне једнакост.

(Александар Илић)

2. У оштроуглом $\triangle ABC$ тачка M је средиште странице BC, а тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека је H ортоцентар $\triangle ABC$, S средиште дужи AH, а G пресек дужи FE и AH. Ако је N тачка пресека тежишне дужи AM и описане кружнице $\triangle BCH$, доказати да је $\sphericalangle HMA = \sphericalangle GNS$. *(Марко Ђикић)*

3. Нека је A бесконачан подскуп скупа природних бројева. Одредити све природне бројеве n такве да за свако $a \in A$ важи

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a^1 + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1.$$

(Милош Милосављевић)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Ниш, 07.04.2010.

Други дан

4. Нека је O центар описане кружнице $\triangle ABC$. Права кроз O сече странице CA и CB у тачкама D и E, редом, и описану кружницу $\triangle ABO$ у тачки P унутар троугла (различитој од O). Тачка Q на страници AB је таква да је $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{DP}{PE}$. Доказати да је $\sphericalangle APQ = 2 \cdot \sphericalangle CAP$. *(Душан Ђукић)*

5. Таблица димензија $n \times n$, на чијим пољима су бројеви $1, 2, \ldots, n^2$ (на сваком пољу тачно један број и сваки број на тачно једном пољу) назива се *нишка* ако сви производи од по n бројева који се налазе на n „разбацаних" поља дају исти остатак при дељењу са n^2+1. Да ли постоји нишка таблица за:

(а) $n = 8$;
(б) $n = 10$?

(n поља су „разбацана" ако никоја два нису у истој врсти или у истој колони.) *(Марко Ђикић)*

6. Нека су a_0 и a_n различити делиоци природног броја $m > 1$, а низ природних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ такав да задовољава

$$a_{i+1} = |a_i \pm a_{i-1}| \quad \text{за } 0 < i < n.$$

Ако је НЗД $(a_0, \ldots, a_n) = 1$, доказати да у низу постоји члан који је мањи од $\sqrt{m}$. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Услов задатка нам даје $0 \leqslant (d_i-1)(2010-d_i)$ за све i, тј. $d_i^2 \leqslant 2011d_i-2010$. Користећи услов $\sum_{i=1}^n d_i = 2m$, сабирањем ових неједнакости добијамо

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \leqslant 2011 \cdot \sum_{i=1}^n d_i - 2010n = 4022m - 2010n,$$

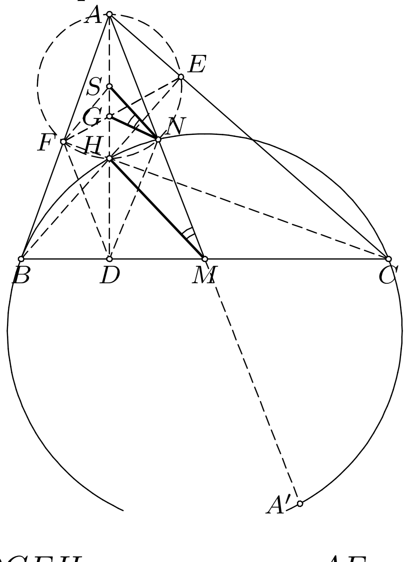
а једнакост важи ако и само ако је $d_i \in \{1, 2010\}$ за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1° Нека је $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Ако успоставимо авиолинију између градова i и j ако и само ако је $|j-i| = k$, имамо $d_i = 1$ за све i.

2° Нека је $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Не може да важи $d_i = 1$ за све i јер би иначе било $2m = n = 2k-1$. Зато мора да буде $d_j = 2010$ за неко j; отуда је $n \geqslant 2011$. С друге стране, успостављањем авиолиније између градова 1 и i ($1 \leq i \leq 2010$) и између градова $2i$ и $2i+1$ ($i = 1006, \dots, k$) даје мрежу у којој је $d_1 = 2010$ и $d_i = 1$ за $2 \leqslant i \leqslant n$.

Према томе, једнакост се може достићи ако $2 \mid n$, или $2 \nmid n$ и $n \geq 2011$.

2. Нека је A' тачка таква да је $ABA'C$ паралелограм. Тада важи $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle BNC$, па су тачке A', B, C, H, N на истом кругу, тј. кругу над пречником HA'. Одавде је $\sphericalangle ANH = 90^\circ$, дакле N је на описаном кругу троугла AEF чији је центар у S.



Сада имамо $\sphericalangle SFG = 90^\circ - \sphericalangle EAF = \sphericalangle ACF = \sphericalangle ADF$. Следи да су троуглови SFG и SDF слични, и одатле $SG \cdot SD = SF^2 = SN^2$. Ово повлачи да је и $\triangle SNG \sim \triangle SDN$, и најзад $\sphericalangle GNS = \sphericalangle SDN = \sphericalangle HMN$ јер је четвороугао $HDMN$ тетиван.

<u>*Друго решење.*</u> Четвороуглови $BDHF$ и $DCEH$ су тетивни и $AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC$. Применимо инверзију $\mathcal{I}$ са центром A и потенцијом $AF \cdot AB$. Очигледно је $\mathcal{I}(F) = B$, $\mathcal{I}(H) = D$, $\mathcal{I}(E) = C$, па $\mathcal{I}$ слика праву BC у описани круг $\triangle FHE$, тј. у круг над пречником AH; даље, $\mathcal{I}$ слика круг BCH у описани круг ω троугла FDE, а то је Ојлеров круг у $\triangle ABC$. Пошто је $M \in \omega \cap AM$ и $\mathcal{I}$ чува праву AM, имамо $\mathcal{I}(M) = N$.

Нека је $\mathcal{I}(G) = G^*$ и $\mathcal{I}(S) = S^*$. Како је $\mathcal{I}(EF)$ описани круг $\triangle ABC$, $S \in \omega$ и $\mathcal{I}(AH) = AH$, тачке G^* и S^* су други пресеци праве AH са круговима ABC и HBC, редом. Према томе, $\sphericalangle GNS = \sphericalangle G^*MS^* = \sphericalangle HMA$ јер су G^* и S^* симетричне тачкама H и A у односу на BC.

3. Означимо $P(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$ и $Q(x) = x^{n!} + \cdots + x^{1!} + 1$; нека је $Q(x) = C(x)P(x) + R(x)$, где су C и R полиноми са целим коефицијентима и $\deg R < \deg P$. По услову задатка $P(a) \mid Q(a)$, и самим тим $P(a) \mid R(a)$, за бесконачно много целих бројева a. Како за довољно велико a важи $|R(a)| < |P(a)|$, мора бити $R(a) = 0$; дакле, $R(x)$ има бесконачно много нула, па је $R(x) \equiv 0$ и $P(x) \mid Q(x)$.

Лема. Нека су $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Полином $P(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$ дели $Q(x) = x^{k_n} + \cdots + x^{k_1} + x^{k_0}$ ако и само ако је $\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$ потпун систем остатака по модулу $n+1$.

Доказ. Нека је r_i остатак при дељењу k_i са $n+1$. Пошто $x^{n+1} - 1$ дели $x^{k_i} - x^{r_i}$ за све i, следи да $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ дели $Q(x) - Q_1(x)$, где је $Q_1(x) = x^{r_0} + x^{r_1} + \cdots + x^{r_n}$ и притом $\deg Q_1 \leqslant n$. Ако $P(x) \mid Q(x)$, онда $P(x) \mid Q_1(x)$, тј. $Q_1(x) = cP(x)$ за неку константу c, а то важи ако и само ако је $c = 1$ и $\{r_0, r_1, \ldots, r_n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$. $\square$

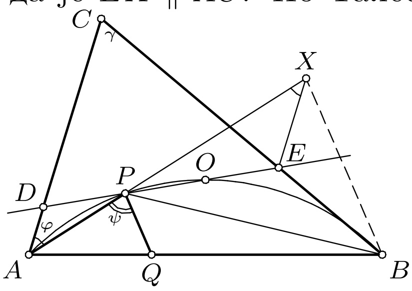
Из леме следи да су тражени бројеви n они за које је $\{0, 1!, \ldots, n!\}$ потпун систем остатака по модулу $n+1$.

Ако је $n > 3$ и $n+1$ је сложен број, онда је $n! \equiv 0 \pmod{n+1}$, па услов није задовољен. Ако је $n+1 = p > 3$ прост, по Вилсоновој теореми је $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, одакле је $(p-2)! \equiv 1 = 1! \pmod p$, и опет услов није задовољен. Остају случајеви $n \leqslant 3$; директном провером се добија да $n = 1$ и $n = 2$ задовољавају услове.

Друго решење. Доказаћемо јаче тврђење: ако $A = a^n + \cdots + a + 1$ дели $a^{k_n} + \cdots + a^{k_1} + a^{k_0}$ за *неко* $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, онда је $\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$ потпун систем остатака по модулу $n+1$.

Нека $A \mid B = a^{k_n} + \cdots + a^{k_1} + a^{k_0}$. Означимо са $r_{i,j}$ остатак при дељењу $k_i + j$ са $n+1$ и посматрајмо бројеве $B_j = a^{r_{n,j}} + \cdots + a^{r_{1,j}} + a^{r_{0,j}}$. Тада је $B_j \equiv a^j B \pmod A$, одакле следи да $A \mid B_j$ за $j = 0, 1, \ldots, n$. С друге стране, $B_0 + B_1 + \cdots + B_n = \sum_j a^{r_{n,j}} + \cdots + \sum_j a^{r_{1,j}} + \sum_j a^{r_{0,j}} = (n+1)A$, па како је $B_j > 0$, мора бити $B_j = A$ за све j. Из неједнакости $A < 2a^n$ закључујемо да је, за свако j, највише један од остатака $r_{i,j}$ једнак n. Али ако је $k_i \equiv k_{i'} \equiv n - j \pmod{n+1}$, онда је $r_{i,j} = r_{i',j} = n$, што је немогуће. Према томе, $k_0, k_1, \ldots, k_n$ су међусобно различити по модулу $n+1$, што је и требало доказати.

4. Нека је X тачка на полуправој AP таква да је $EX \parallel AC$. По Талесовој теореми је $AP : PX = DP : PE = AQ : QB$, одакле следи $BX \parallel QP$.



Права PE је спољашња симетрала угла APB и полови угао BPX. Такође, пошто је $\sphericalangle BEX = 180 - \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BPX = 180° - \sphericalangle APB = 180° - 2\sphericalangle ACB$, добијамо $\sphericalangle BEX = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle BPX$. Следи да је E центар уписаног круга троугла BPX и одатле $\sphericalangle APQ = \sphericalangle PXB = 2\sphericalangle PXE = 2\sphericalangle CAP$.

Друго решење. Конструкција из задатка је могућа само ако је $\triangle ABC$ оштроугли. Означимо $\sphericalangle PAD = \varphi$, $\sphericalangle QPA = \psi$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. Из $\sphericalangle APB = 2\gamma$ и $\sphericalangle DAP + \sphericalangle EBP = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = \gamma$ следи $\sphericalangle PBE = \gamma - \varphi$ и $\sphericalangle BPQ = 2\gamma - \psi$. Како је $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPE = 90° - \gamma$, такође имамо $\sphericalangle ADP = 90° + \gamma - \varphi$ и $\sphericalangle BEP = 90° + \varphi$.

Синусне теореме у троугловима APD и PBE дају $\frac{DP}{PE} = \frac{DP}{PA} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{PB}{PE} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\gamma-\varphi)\cos(\gamma-\varphi)} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(2\gamma-2\varphi)} \cdot \frac{PA}{PB}$. С друге стране, $\frac{AQ}{QB} = \frac{AQ}{AP} \cdot \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{QB} = \frac{\sin\psi}{\sin(2\gamma-\psi)} \cdot \frac{AP}{PB}$, па се услов $\frac{AQ}{QB} = \frac{DP}{PE}$ своди на $f(2\varphi) = f(\psi)$, где је $f(x) = \frac{\sin(2\gamma-x)}{\sin x} = \sin 2\gamma \operatorname{ctg} x - \cos 2\gamma$. Јасно је да је f строго опадајућа функција на $(0, \pi)$, па мора бити $\psi = 2\varphi$.

5. **(а)** Претпоставимо да постоји нишка таблица 8×8 и да производ ма којих 8 разбацаних бројева даје остатак r по модулу $8^2 + 1 = 65 = 5 \cdot 13$. Сви бројеви у таблици се могу поделити на 8 дисјунктних осморки разбацаних бројева. Међу овим осморкама постоји једна која садржи умножак броја 13 и једна која не садржи такав умножак. Производ бројева у првој осморци је дељив са 13, а у другој није, контрадикција. Закључујемо да нишка таблица 8×8 не постоји.

(б) Број $n^2 + 1 = 101$ је прост. Попунимо таблицу као на слици, где је g примитиван корен по модулу 101. Лако се види да је производ бројева у ма којих 10 разбацаних поља конгруентан са $g^{495} \pmod{101}$, па је ово пример нишке таблице.

g^0	g^1	g^2	$\cdots$	g^9
g^{10}	g^{11}	g^{12}	$\cdots$	g^{19}
g^{20}	g^{21}	g^{22}	$\cdots$	g^{29}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
g^{90}	g^{91}	g^{92}	$\cdots$	g^{99}

6. Посматрајмо два најмања (различита) члана низа, p и q. Ако је $\min\{p, q\} = 1$, тврђење тривијално важи; зато надаље претпостављамо да је $p, q > 1$.

Лема 1. Постоје индекси k и l за које је $a_k = p$, $a_l = q$ и $|k - l| \le 2$.

Доказ. Нека је $a_k = p$ и $a_l = q$ $(k < l)$. Претпоставимо да је $r = l - k > 2$. Доказаћемо индукцијом по r да за неко i, $k < i < l$, важи $a_i \in \{p, q\}$. Како је $a_{k+3} \neq |a_{k+2} - a_{k+1}| = p$, имамо $a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2}$; слично је и $a_{l-3} = a_{l-2} + a_{l-1}$. Нека је $a_m = \max_{p<i<q} a_i$. Јасно је да је $k+2 < m < l-2$ (дакле, $l-k \geqslant 6$), а такође и $a_{m+2} = a_m - a_{m+1} = a_{m-1}$ и $a_{m+1} = a_m - a_{m-1} = a_{m-2}$. То значи да низ (a'_i), дефинисан са $a'_i = a_i$ за $i < m$ и $a'_i = a_{i+3}$ за $i \geqslant m$, задовољава услове задатка; притом је $a'_k = p$ и $a'_{l-3} = q$, па по индуктивној претпоставци (јер је $(l-3)-k \geqslant 3$) важи $a'_i \in \{p, q\}$ за неко i $(k < i < l-3)$. Тада је и $a_i \in \{p, q\}$ или $a_{i+3} \in \{p, q\}$, чиме је индукција готова. $\square$

Лема 2. За свако i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ постоје $x_i, y_i \in \mathbb{N}_0$ такви да је $a_i = x_i p + y_i q$ и $(x_i, y_i) = 1$.

Доказ. Посматрајмо векторе $v_k = (1, 0)$ и $v_l = (0, 1)$ и, за свако i, дефинишимо $v_{i+2} = \varepsilon_i v_i + \varepsilon'_i v_{i+1}$ ако је $a_{i+2} = \varepsilon_i a_i + \varepsilon'_i a_{i+1}$ $(\varepsilon_i, \varepsilon'_i \in \{-1, 1\})$. Једноставном индукцијом добијамо да за $v_i = (x_i, y_i)$ важи

$$a_i = x_i p + y_i q. \tag{1}$$

Како је $x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1} = x_{i+1}(\varepsilon_i y_i + \varepsilon'_i y_{i+1}) - (\varepsilon_i x_i + \varepsilon'_i x_{i+1})y_{i+1} = -\varepsilon_i(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i)$ и слично $x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i = \varepsilon'_i(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i)$, имамо

$$x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i,\ x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i \in \{-1, 1\} \text{ за } 0 \leqslant i < n \tag{2}$$

и одатле $(x_i, y_i) = 1$. Остаје још да покажемо да су $x_i, y_i \geqslant 0$ за све i.

Претпоставимо да је $x_i < 0$ за неко $i < k$ (случај $y_i < 0$ и/или $i > l$ је аналоган) и посматрајмо највеће такво i. Због $a_i > 0$ и (1) имамо $y_i > 0$. Из (2) и $x_i y_{i+1}, x_i y_{i+2} \leqslant 0 \leqslant x_{i+1}y_i, x_{i+2}y_i$ следи да су v_{i+1}, $v_{i+2} \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, а тада мора бити $v_i = \pm(1, -1)$, тј. $a_i = |p - q|$. Међутим, како су p и q узајамно прости и већи од 1, важи $\max\{p, q\} > |p - q| \notin \{p, q\}$, противно избору p и q. $\square$

Нека је $m = da_0 = ea_n$. По леми 2 је $m = dx_0 p + dy_0 q = ex_n p + ey_n q$, при чему је $(dx_0, dy_0) \neq (ex_n, ey_n)$ јер због $a_0 \neq a_n$ важи $\frac{x_0}{y_0} \neq \frac{x_n}{y_n}$. Одатле следи да $p \mid dy_0 - ey_n$, па је $dy_0 > p$ или $ey_n > p$; коначно, $m > pq$ и према томе $\min(p, q) < \sqrt{m}$.