ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Први разред, А категорија

1. Нека су $x, y, z \in \mathbb{N}$ за које важи $x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$ и $x^2 = 2(y+z)$. Одредити $x+y+z$.

2. Доказати или оповргнути тврђење:

> За сваки природан број n постоји природан број x који је дељив са n, збир цифара му је једнак n и у декадном запису се завршава низом цифара које чине декадни запис броја n.

3. Нека је ABC оштроугли троугао. Кружница k, над пречником AB, сече странице AC и BC у тачкама M и N, редом. Тангенте кружнице k у тачкама M и N секу се у тачки P. Ако је $CP = MN$, одредити $\sphericalangle BCA$.

4. У $\triangle ABC$ у коме је $BC \neq CA$ тачке H, T и O су ортоцентар, тежиште и центар описане кружнице, редом. Нека су тачке P и Q симетричне тачкама T и H, редом, у односу на O. Нека је D средиште AB, R тежиште $\triangle ABQ$ и U пресек правих OD и RT. Доказати да је U тежиште $\triangle DPT$.

5. На колико начина шест парова може да седне у ред биоскопа који има 20 места, ако сваки пар жели да седне на суседна места?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Први разред, Б категорија

1. Колико решења има једначина $|2x+1|+|x-1| = 2-x$ у скупу реалних бројева?

2. У правоуглом $\triangle ABC$ над катетом BC као пречником конструисана је кружница која сече хипотенузу AB у тачки E. Тангента ове кружнице у тачки E сече катету AC у тачки D. Доказати да је $\triangle ADE$ једнакокраки.

3. Одредити цифру десетица броја 2011^{2010} (у декадном запису).

4. Ана, Беба, Весна и Гоца су одлучиле да посете Дацу. Договориле су се да дођу у различита времена. Испоставило се следеће:

Ана је посетила Дацу у 8 сати,
Беба је посетила Дацу у 9 сати,
Весна је посетила Дацу у 10 сати,
Гоца је посетила Дацу у 11 сати,

али није познато да ли је то било ујутро или увече.

Даца је имала бар једну посету између Ане и Бебе.

Ана није посетила Дацу и пре Весне и пре Гоце.

Весна није посетила Дацу између Бебе и Гоце.

Одредити којим редоследом су посећивали Дацу.

5. Нека су $x, y, z \in \mathbb{N}$ за које важи $x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$ и $x^2 = 2(y+z)$. Одредити $x+y+z$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Други разред, А категорија

1. Нека је $ABCDE$ правилан петоугао. Пресечне тачке његових дијагонала чине правилан петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$. Одредити однос површина ова два петоугла.

2. На турниру учествује $n \geqslant 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након k одиграних партија $(1 \leqslant k \leqslant n-3)$, а играч B након једне одигране партије. Остали играчи нису напуштали турнир. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?

3. Нека су M, N, P, Q колинеарне тачке, тако да важи $M-N-P-Q$ и $MN = 4$, $NP = 2$, $PQ = 6$. Нека је T тачка ван праве MN из које се дужи MN, NP, PQ виде под једнаким углом α. Одредити могуће вредности α.

4. Одредити све природне бројеве n за које постоји полином са целим коефицијентима $p(x)$ такав да је $p(d) = \frac{n}{d}$ за сваки позитиван делилац d броја n.

5. Нека су a, b реални бројеви из интервала $(0,1)$. Доказати да је $a^2+b^2=1$ ако и само ако је

$$\frac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1} = \frac{2}{3}\,.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Други разред, Б категорија

1. Нека је M средиште странице CD квадрата $ABCD$, S пресек дијагонала, а P средиште дужи AS. Доказати да је $\sphericalangle PBS = \sphericalangle MBC$.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2+x+1} = 1 - x - x^2.$$

3. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 2 + 3\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 &= 6. \end{aligned}$$

4. На турниру учествује $n \geqslant 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након 10 одиграних партија, а играч B након једне одигране партије. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?

5. На питање који му је број куће, Перица је одговорио следеће:

Ако је мој број куће дељив са 3, онда је то број између 50 и 59.

Ако мој број куће није дељив са 4, онда је то број између 60 и 69.

Ако мој број куће није дељив са 6, онда је то број између 70 и 79.

Који је Перицин број куће?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да је природан број $n \geqslant 4$ прост ако и само ако
$$n \mid \sum_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!).$$

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2010} \in \mathbb{C}$ све нуле полинома $x^{2010}+20x+2$. Израчунати
$$x_1^{2011}+x_2^{2011}+\ldots+x_{2010}^{2011}.$$

3. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Испитати истинитост тврђења:

> Ако за међусобно различите комплексне бројеве $z_1, z_2, \ldots, z_n$ за које је $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|$ важи $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$, тада су тачке одређене комплексим бројевима $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (у неком поретку) темена правилног n-тоугла.

4. Колико има подскупова скупа $\{1,2,\ldots,10\}$ који не садрже три узастопна природна броја?

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека је $\{P_1\}=AB\cap ED$, $\{P_2\}=BC\cap EA$, $\{P_3\}=CD\cap BA$, $\{P_4\}=DE\cap CB$ и $\{P_5\}=EA\cap DC$. Кружнице описане око троуглова P_1AE, P_2BA, P_3CB, P_4DC и P_5ED секу се у тачкама A', B', C', D' и E' различитим од тачака A, B, C, D и E. Доказати да су тачке A', B', C', D' и E' концикличне.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да за све векторе $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ важи

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}\\ =\ &\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\right)\times\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)\times\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\right).\end{aligned}$$

2. Ако је r полупречник основе и H висина праве кружне купе, а ρ полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи $\dfrac{1}{\rho^2}-\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{2}{\rho H}$.

3. Одредити све $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ који су решења система

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^3 y,\\ \sin x &= 2\sin^3 y.\end{aligned}$$

4. Нека су M, N, P, Q колинеарне тачке, тако да важи $M-N-P-Q$ и $MN=4$, $NP=2$, $PQ=6$. Нека је T тачка ван праве MN из које се дужи MN, NP, PQ виде под једнаким углом α. Одредити могуће вредности α.

5. На питање који му је број куће, Перица је одговорио следеће:

> Ако је мој број куће дељив са 3, онда је то број између 50 и 59.
>
> Ако мој број куће није дељив са 4, онда је то број између 60 и 69.
>
> Ако мој број куће није дељив са 6, онда је то број између 70 и 79.

Који је Перицин број куће?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да је природан број $n \geqslant 4$ прост ако и само ако $n \mid \sum_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!)$.

2. За реалан број b нека је

$$f(b) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left| \sin x + \frac{2}{3 + \sin x} + b \right|.$$

Одредити $\min_{b \in \mathbb{R}} f(b)$.

3. Нека су $m, n \geqslant 2$ природни бројеви и $A = (a_1, \ldots, a_m)$ уређена m-торка, а $B = (b_1, \ldots, b_n)$ уређена n-торка комплексних бројева различитих од 0. У једном кораку могуће је извршити једну од следећих операција:

1° Изабрати $1 \leqslant i < j \leqslant m$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве a_i и a_j заменити бројевима za_i и $\frac{a_j}{z}$, редом.

2° Изабрати $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве b_i и b_j заменити бројевима zb_i и $\frac{b_j}{z}$, редом.

3° Изабрати $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве a_i и b_j заменити бројевима za_i и zb_j, редом.

Може ли се применом коначно много ових операција од A и B добити m-торка $\overline{A} = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m})$ и n-торка $\overline{B} = \left(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}\right)$, редом?

4. За сваки природан број n са $p(n)$ означен је број квадратних функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ чији су корени цели бројеви и $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да за $n \geqslant 4$ важи $n < p(n) < n^2$.

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека је $\{P_1\} = AB \cap ED$, $\{P_2\} = BC \cap EA$, $\{P_3\} = CD \cap BA$, $\{P_4\} = DE \cap CB$ и $\{P_5\} = EA \cap DC$. Кружнице описане око троуглова P_1AE, P_2BA, P_3CB, P_4DC и P_5ED секу се у тачкама A', B', C', D' и E' различитим од тачака A, B, C, D и E. Доказати да су тачке A', B', C', D' и E' конциклични.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Четврти разред, Б категорија

1. Збир два позитивна броја једнак је c $(c > 0)$. Колики је највећи могући производ куба првог и квадрата другог броја?

2. Ако је r полупречник основе и H висина праве кружне купе, а ρ полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи $\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{2}{\rho H}$.

3. Доказати да је $\dfrac{\pi}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{27}} + \arcsin \sqrt{\frac{3}{28}}}$ природан број.

4. Нека су z_1 и z_2 међусобно различити комплексни бројеви, такви да је $z_1 z_2 \neq 0$.

(а) Ако је $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, доказати да тачке одређене комплексним бројевима $0, z_1$ и z_2 чине темена правоуглог троугла.

(б) Ако тачке одређене комплексним бројевима $0, z_1$ и z_2 чине темена правоуглог троугла мора ли бити $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

5. Пет студената, Аца, Беба, Весна, Гоца и Доки су одговарали на тест који се састоји од 5 питања са вишеструким одговорима. Прва два питања су имала одговоре a, b и c, док је на остала одговор тачно–нетачно $(\perp\!-\!\top)$. Одговор на свако од питања је јединствен. Они су одговорили на питања на следећи начин:

	I	II	III	IV	V
Аца	a	a	$\top$	$\top$	$\top$
Беба	b	b	$\top$	$\perp$	$\top$
Весна	a	b	$\top$	$\top$	$\perp$
Гоца	b	c	$\top$	$\top$	$\perp$
Доки	c	a	$\perp$	$\top$	$\top$

Испоставило се да не постоје два студента који имају једнак број тачних одговора.

(а) Доказати да ниједан од студената нема све тачне одговоре.

(б) Доказати да одговори на треће и четврто питање нису исти.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.