Личная письменная олимпиада «АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ». Решения

Младшая лига

1. Даны различные действительные числа x и y такие, что $x/y + x = y/x + y$. Чему может быть равно $1/x + 1/y$? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

2. Пусть a, b и c — положительные числа, такие, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ac} + \frac{c^2}{c+ab} \geqslant \frac{3}{2}.$$

3. Существуют ли целые числа $a_1, \ldots, a_9$ такие, что

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)\ldots(a_8 - a_9)(a_9 - a_1) = (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)\ldots(a_8 - a_1)(a_9 - a_2) \neq 0?$$

4. На большой доске написано натуральное число, в десятичной записи которого присутствует более чем 2009 цифр. Докажите, что хулиган Вася может стереть в числе не более чем 2009 цифр так, чтобы оставшееся число (возможно, теперь оно начинается с 0) делилось на 2009.

Старшая лига

1. Даны натуральные числа m и n, наименьшее общее кратное которых — точный квадрат. Докажите, что найдется общий натуральный делитель d чисел m и n такой, что m/d — точный квадрат.

2. Пусть $\mathbb{R}_+$ обозначает множество всех положительных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такие, что $xf(y) - yf(x) = f(y/x)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}_+$.

3. Даны натуральные числа n и $m \leqslant n^2/8$. Докажите, что найдутся целые неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a + b + c + d = n$ и $ab + cd = m$.

4. Даны действительные числа x_1, x_2, …, x_n, такие, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Докажите, что

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\\ 1\leqslant m\\ k\cdot m\leqslant n}} x_k x_m \leqslant 2\sqrt{n}.$$

Решения.

Младшая лига

1. *Решение.* Преобразуем равенство из условия: $y - x = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$. Используя $x \neq y$, получаем $-1 = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. *Ответ:* -1.

2. *Решение.* Выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\frac{a^2}{a+bc} = \frac{a^3}{a^2+1} = \frac{a^3+a-a}{a^2+1} = a - \frac{a}{a^2+1} \geqslant a - \frac{1}{2}.$$

Аналогично для второго и третьего слагаемых. Складывая эти неравенства и учитывая, что $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3$, получаем требуемое.

3. *Решение.* Положим $a_2 = a_8$. Тогда многочлены $a_1 - a_2$ и $a_8 - a_1$ можно сократить. Оставшееся выражение будет линейным уравнением на a_1. Тогда любой набор целых чисел $a_2, \ldots, a_9$, в котором равны a_2 и a_8, а остальные различны, задает a_1, удовлетворяющее равенству из условия задачи. Действительно, так как $a_1 \neq a_2$ и $a_1 \neq a_8$, исходное равенство равносильно уравнению для a_1, и произведение не будет равно 0 (так как равны только a_2 и a_8). Теперь, умножив набор на знаменатель a_1, получим набор целых чисел.

4. *Решение.* Рассмотрим числа, составленные из последних k цифр, для $k = 1, \ldots, 2010$. Среди этих 2010 остатков есть одинаковые и пусть они соответствуют числам, составленным из a и b цифр ($a > b$). Тогда число, составленное из цифр с b-й по a-ю делится на 2009. Назовём эти цифры *неприкосновенными* и не будем их вычеркивать. Теперь будем рассматривать числа, составленные из последних k цифр, где $k = 1, \ldots, b, a, \ldots, 2010 + a - b$. Это снова 2010 чисел. Далее повторяем рассуждения: появятся ещё неприкосновенные цифры. Продолжая действовать таким образом, мы получим, что не неприкосновенных цифр будет не больше 2009 и их можно вычеркнуть (напомним, числа, составленные из неприкосновенных цифр, делятся на 2009).

Старшая лига

1. *Решение.* Рассмотрим те простые делители a, которые входят в a в нечетной степени. Тогда в b они входят в большей степени (так как НОК является квадратом). Тогда включим все эти делители в d в первой степени. Тогда условие задачи будет выполнено.

2. *Решение.* Подставим $x = y = 1$: $f(1) = 0$. Теперь подставим $y = 1$: $f(x) = -f(\frac{1}{x})$. Рассмотрим теперь пары (x, y) и $(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$. Получим $xf(y) - yf(x) = \frac{1}{y}f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{x}f(y) - \frac{1}{y}f(x)$. Отсюда, $f(x) = \frac{f(y)(x-\frac{1}{x})}{y-\frac{1}{y}}$. Таким образом, функция имеет вид $f(x) = c(x - \frac{1}{x})$, где c — некоторое число.

3. *Решение.* Будем искать ответ в виде $c = a + 1$. Получим $b = (2n - 2a - 1)(a + 1) - m$ и $d = m - a(n - 2a - 1)$. Надо добиться, чтобы эти числа были неотрицательны. Пусть есть такие a, что $(2n - 2a - 1)(a + 1) \geqslant m$. Если среди них есть 0, то $d = 0$ и все хорошо. Иначе возьмем наименьшее такое a. Так как оно наименьшее, для $a - 1$ соответствующее неравенство неверно: $m \geqslant a(2n - (2a - 2) - 1)$, то есть $d > 0$. Значит, надо найти хотя бы одно такое a. Это сводится к квадратному неравенству с дискриминантом $(n + 1)^2 - 8m$, что больше 0 по условию. Теперь легко видеть, что найдутся целые неотрицательные a, удовлетворяющие этим условиям.

4. *Решение.* Заметим, что выполнены неравенства: $x_k x_m \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{k}{m}}x_k^2 + \sqrt{\frac{m}{k}}x_m^2)$. Сложим такие неравенства для всех пар k и m, где $mk \leqslant n$. Получим сумму выражений вида
$$\sqrt{k}x_k^2 \sum_{m \leqslant \frac{n}{k}} \sqrt{m}.$$
По индукции легко доказать, что
$$\sum_{m<x} \frac{1}{\sqrt{m}} \leqslant \sqrt{x}.$$
Таким образом, получим $2\sqrt{k}x_k^2\sqrt{\frac{n}{k}} = 2x_k^2\sqrt{n}$. Из $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ получаем требуемое неравенство.

Личная письменная олимпиада «ГЕОМЕТРИЯ». Решения

Младшая лига

1. В треугольнике ABC проведена медиана BD, и на ней отмечена точка пересечения медиан G. Прямая, параллельная BC и проходящая через точку G, пересекает AB в точке E. Оказалось, что $\angle AEC = \angle DGC$. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

2. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки X и Y соответственно. Отрезки AY и DX пересекаются в точке P, а отрезки CX и BY пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \geqslant \frac{1}{2}AB$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Точки M и N симметричны точке D относительно прямых AC и AB соответственно. Луч AO (где O — центр описанной окружности треугольника ABC) пересекает BC в точке E. Докажите, что $\angle CME = \angle BNE$.

4. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M, а сторону BC в точке A_1. Через точки B и C провели окружность ω с центром в точке M. Хорда XY окружности ω проходит через точку A_1. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и AXY совпадают.

Старшая лига

1. Пусть H — ортоцентр равнобедренного треугольника ABC ($AC = AB$). Точка L на основании BC такова, что $LH \| AC$, а точка M на стороне AC такова, что $ML \| AB$. Луч LH пересекает AB в точке K. Докажите, что $\angle LMK = 90°$.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Отрезки AC и BD — хорды окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, причем отрезок AB и луч CD пересекаются в точке P. Луч BD и отрезок AC пересекаются в точке X. Точка Y на окружности ω_1 такова, что $PY \parallel BD$. Точка Z на окружности ω_2 такова, что $PZ \parallel AC$. Докажите, что точки Q, X, Y и Z лежат на одной прямой.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке A_1. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке P. Отрезки CP и BP пересекают вписанную окружность в точках M и N соответственно. Точка Q — середина отрезка MN. Докажите, что $\angle MQA_1 = \angle MQP$.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. Пусть h_a, h_b и h_c — соответственные высоты треугольника ABC. Докажите, что
$$\frac{PA}{h_b + h_c} + \frac{PB}{h_a + h_c} + \frac{PC}{h_a + h_b} \geqslant 1.$$

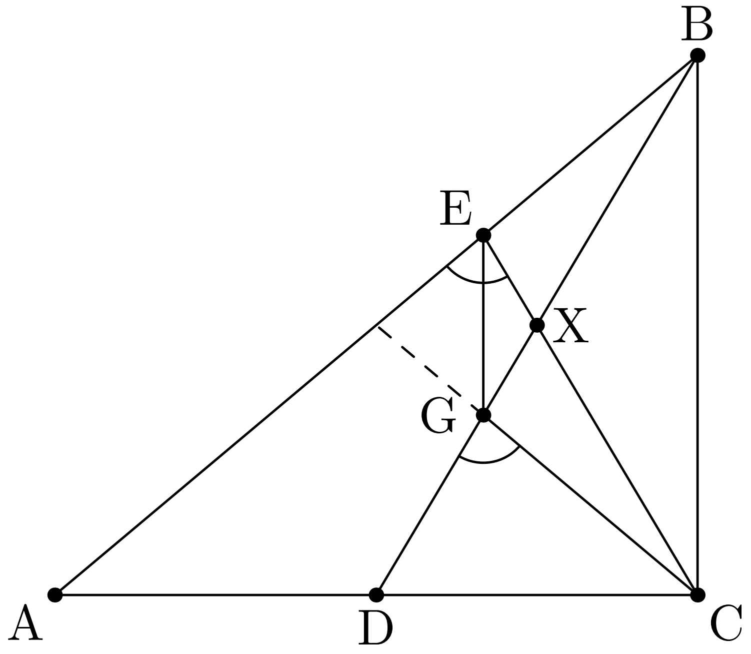

Рис. 1: к решению задачи 1

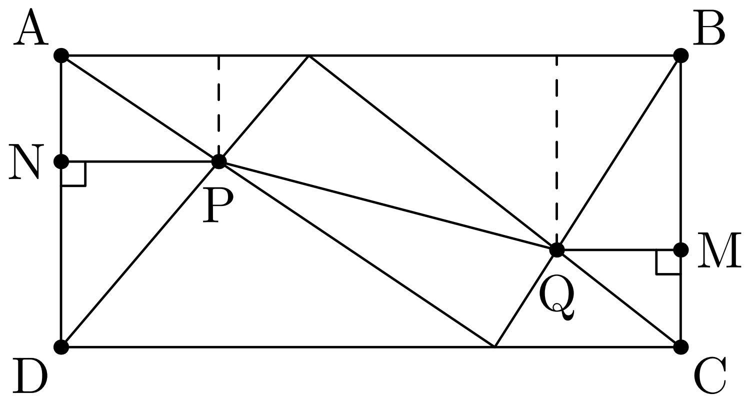

Рис. 2: к решению задачи 2

Решения.

Младшая лига

1. *Решение.* Обозначим через X точку пересечения CE и BD (см. рис. 1). Заметим, что равные углы AEC и DGC являются внешними углами к треугольникам EXB и CXG соответственно. В этих треугольниках есть равные вертикальные углы, а значит $\angle XCG = \angle XBE$. Таким образом, трапеция $CGEB$ является вписанной, а значит равнобочной. Отсюда $EB = CG$. Заметим, что EB составляет $2/3$ от половины стороны AB (это легко следует из теоремы Фалеса), а CG — это $2/3$ от медианы из вершины C. Значит медиана из вершины C равна половине стороны AB, откуда и следует, что угол BCA прямой.

2. *Решение.* Опустим из P на сторону AD перпендикуляр PN, а из точки Q на сторону BC перпендикуляр QM (см. рис. 2). Из подобия треугольников DNP и DAX, а также треугольников APN и AYD следует, что $PN/AX = DP/PX = PY/AY = 1 - AP/AY = 1 - PN/DY$. Получаем, что $\frac{PN}{AX} + \frac{PN}{DY} = 1$, откуда $PN = \frac{AX \cdot DY}{AX+DY} \leqslant \frac{AX+DY}{4}$, где последнее есть неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим. Аналогично $QM \leqslant \frac{BX+CY}{4}$, а значит $PN+QM \leqslant AB/2$. Теперь заметим, что $NP + PQ + QM \geqslant NM \geqslant AB$, откуда $PQ \geqslant AB - (PN + QM) \geqslant \frac{1}{2}AB$, что и требовалось.

3. *Решение.* Заметим сначала, что $\angle CAD = \angle EAD$.
Действительно, если OL перпендикуляр на сторону AB (соответственно, серединный, см. рис. 3), мы имеем: $\angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACD$ (центральный угол равен половине вписанного), откуда углы, дополняющие углы AOL и ACD до $90°$ тоже равны. Это и есть углы EAB и CAD. Аналогично, имеем $\angle CAE = \angle DAB$.
Пользуясь полученными равенствами, а также симметричностью точек M и N точке D, мы получаем $\angle MAC = \angle CAD = \angle EAD$ и $\angle CAE = \angle DAB = \angle BAN$. Из полученных равенств мы заключаем, что $\angle MAE = \angle EAN$. Так как в силу

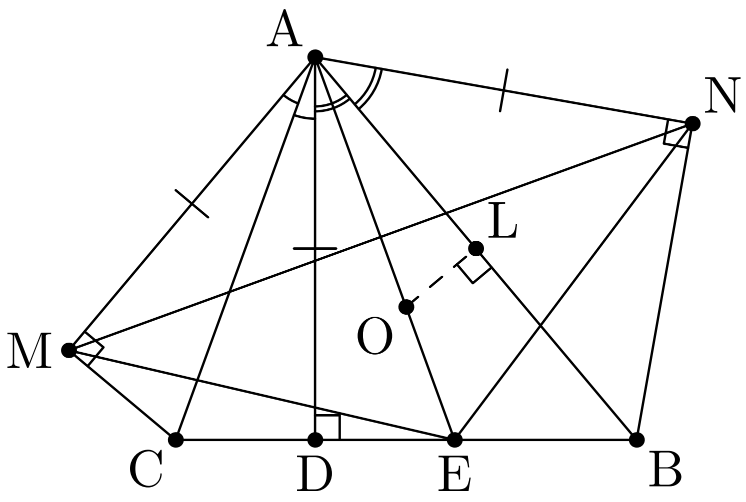

Рис. 3: к решению задачи 3

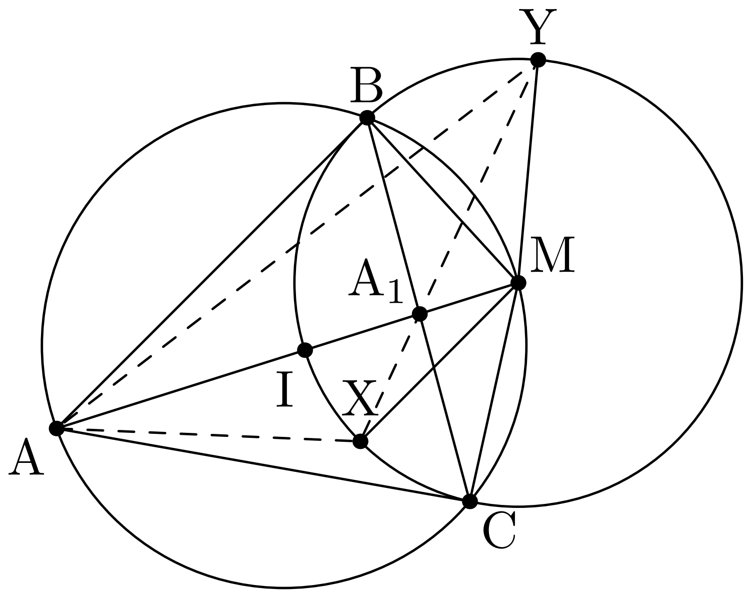

Рис. 4: к решению задачи 4

симметрии из условия, мы имеем $AM = AD = AN$, откуда следует, что прямая AE есть серединный перпендикуляр в отрезку MN, то есть ось симметрии отрезка MN. Отсюда $\angle ANE = \angle AME$, а так как $\angle EMC = \angle AMC - \angle AME$ и $\angle ENB = \angle ANB - \angle ANE$, нам достаточно доказать, что $\angle ANB = \angle AMC$. Но оба эти угла прямые, так как симметричны углам ADB и ADC в силу условия. Тем самым требуемое равенство доказано.

4. *Решение.* Воспользуемся леммой о трезубце: $IM = MC = MB$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 4).
Заметим, что $XA_1 \cdot A_1Y = BA_1 \cdot A_1C = AA_1 \cdot A_1M$, откуда следует, что четырехугольник $AXMY$ — вписанный. Далее, из соотношения $MX = MY = MI$ снова по лемме о трезубце следует, что I — центр вписанной окружности треугольника AXY.
Идея другого решения. Можно заметить, что проведенная окружность является окружностью Аполлония для точек A и A_1.

Старшая лига

1. *Решение.* Пусть B_1 — основание высоты треугольника ABC, опущенной из точки B (см. рис. 5).
Из подобия равнобедренных треугольников CML и LKB и параллельности прямых LK и AC имеем

$$\frac{KL}{LM} = \frac{LB}{CL} = \frac{BH}{HB_1} = \frac{CH}{HB_1}$$

из симметрии треугольника ABC относительно AH. Кроме того, $\angle CHB_1 = \angle MAK = \angle MLK$, а значит треугольники CHB_1 и KLM подобны и $\angle LMK = 90°$, ч.т.д.

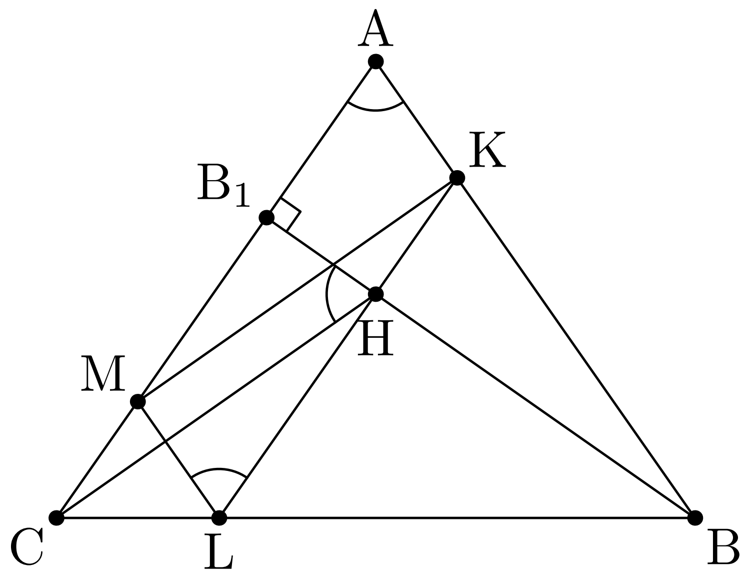

Рис. 5: к решению задачи 1

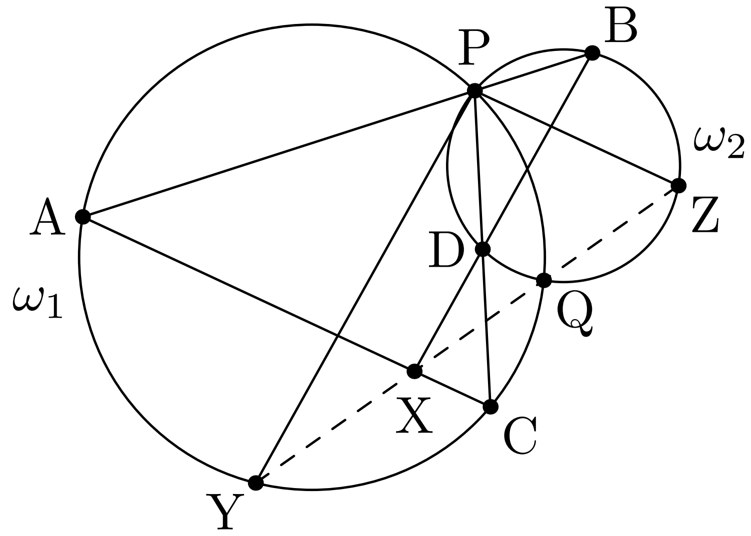

Рис. 6: к решению задачи 2

2. *Решение.* См. рис. 6 Вначале покажем, что точки Y, Q и Z лежат на одной прямой. Для этого запишем равенства сумм углов:

$$\begin{aligned}\angle PQY + \angle PQZ &= 360^\circ - \angle PAY - \angle PBZ = \\ &= 360^\circ - \angle PAC - \angle CAY - \angle PBD - \angle DBZ = \\ &= 360^\circ - \angle BPZ - \angle CPY - \angle APY - \angle DPZ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Далее, $\angle AQB = 180^\circ - \angle YQA - \angle BQZ = 180^\circ - \angle YPA - \angle BPZ = \angle ZPY = \angle AXB$, а значит точки A, B, X, Q лежат на одной окружности и $\angle AQX = \angle ABX = \angle APY = \angle AQY$, а значит точка X лежит на прямой QY, ч.т.д.

3. *Решение. Замечание.* Вписанный четырехугольник $XYZT$ называется *гармоническим*, если у него равны произведения противоположных сторон (см. рис. 7). С помощью теоремы синусов несложно получить, что вписанный четырехугольник $XYZT$ гармонический если только если стороны XY и XT видны под равными углами из середины диагонали XZ. Также несложно получается, что четырехугольник $XYZT$ гармонический в том и только том случае когда касательные к окружности в точках Y и T пересекаются на прямой XZ. Таким образом, в задаче необходимо показать, что четырехугольник $MPNA_1$ является гармоническим.

Решение 1. Пусть D — точка пересечения касательной к вписанной окружности ω в точке P с прямой BC (можно считать, что D ближе к C чем к B, см. рис. 8); B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB. Точка A лежит на поляре точки D относительно ω, а значит D лежит на поляре A, то есть прямой B_1C_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, из теоремы Чевы для них и теоремы Менелая для прямой точек D, B_1, C_1 получаем

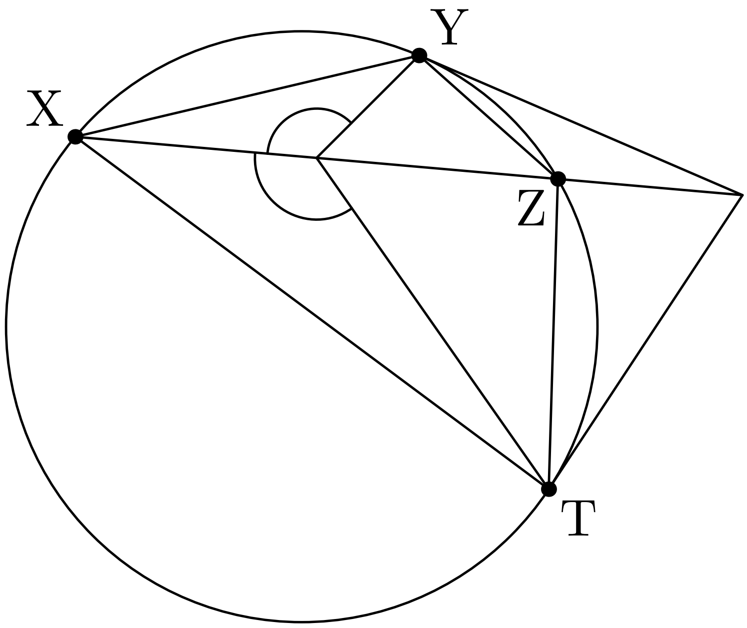

Рис. 7: к решению задачи 3

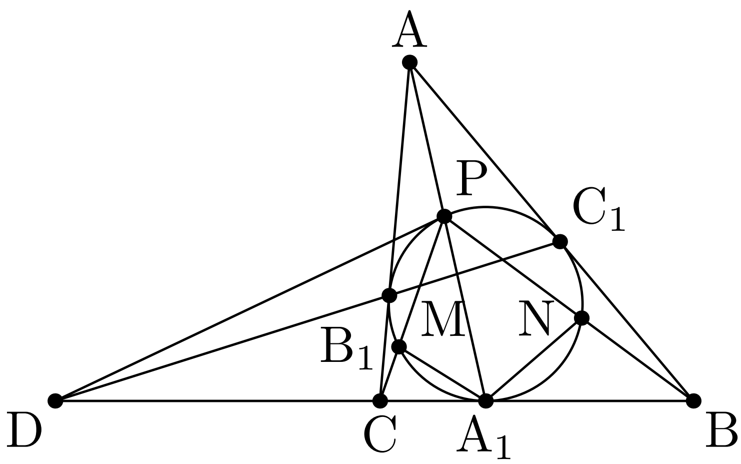

Рис. 8: к решению задачи 3

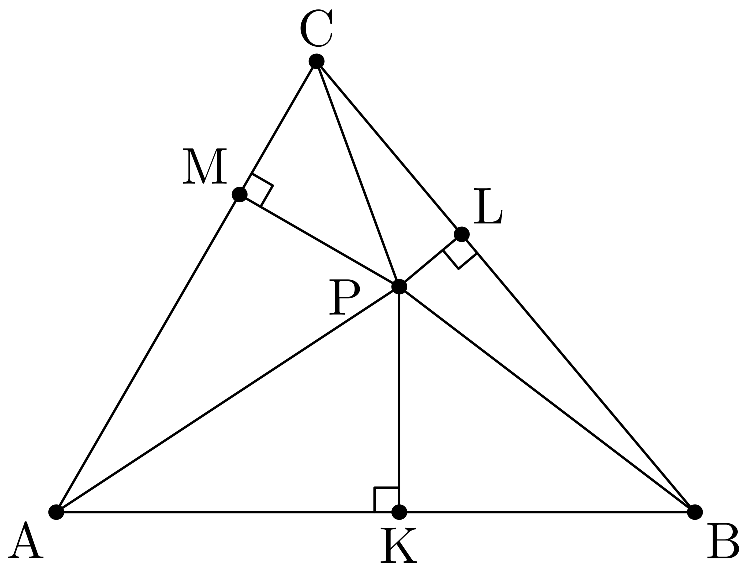

Рис. 9: к решению задачи 4

равенство $\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}=1$. Из теоремы синусов для треугольников CPD и DPB имеем $\frac{CD}{DB}=\frac{\sin\angle CPD}{\sin\angle DPB}\cdot\frac{PC}{PB}$, аналогично $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin\angle BPA_1}{\sin\angle A_1PC}\cdot\frac{PB}{PC}$. Перемножая данные равенства, получаем

$$\frac{\sin\angle CPD}{\sin\angle DPB}\cdot\frac{\sin\angle BPA_1}{\sin\angle A_1PC}=1,$$

откуда несложно получается равенство $MP\cdot A_1N=NP\cdot A_1M$, так как $\angle CPD=\angle PA_1M$ и $\angle DPB=180^\circ-\angle PA_1N$. Таким образом гармоничность четырехугольника A_1MPN доказана и задача решена.

Решение 2. Сделаем проективное преобразование, которое переводит треугольник ABC в равнобедренный с вершиной A и оставляет его вписанную окружность на месте. Такое преобразование переводит гармонический четырехугольник на вписанной окружности в гармонический четырехугольник, так как оно переводит касательные в касательные и их точка пересечения все равно будет лежать на продолжении другой диагонали. Для нового треугольника условие задачи очевидно верно в силу симметрии относительно A_1P.

4. *Решение.* Пусть K, L, M — основания перпендикуляров из точки P на стороны AB, BC, CA соответственно и длины сторон треугольника равны a, b, c (см. рис. 9).

Лемма. Выполнено неравенство:

$$PA\geqslant\frac{(b+c)(PK+PM)}{2a}.$$

Доказательство. Рассмотрим площадь невыпуклого четырехугольника $ABPC$. Она не больше произведения длин его диагоналей, то есть $a\cdot PA\geqslant c\cdot PK+b\cdot PM$. Аналогично, рассмотрев точку, симметричную P относительно биссектрисы угла A, получаем неравенство $a\cdot PA\geqslant b\cdot PK+c\cdot PM$. Сложив два полученных неравенства, получаем доказываемое.

Аналогично

$$PB\geqslant\frac{(c+a)(PL+PK)}{2b}.$$

и

$$PC\geqslant\frac{(a+b)(PM+PL)}{2c}.$$

Пусть S площадь исходного треугольника, тогда $\frac{PA}{h_b+h_c}=\frac{bc\cdot PA}{2S(b+c)}\geqslant\frac{bc(PK+PM)}{2aS}$. С помощью аналогичных неравенств для PB и PC получаем, что левая часть исходного неравенства не меньше чем

$$\frac{a^2b^2(PM+PL)+b^2c^2(PK+PM)+c^2a^2(PL+PK)}{2abcS}.$$

Преобразуем числитель $a^2b^2(PM+PL)+b^2c^2(PK+PM)+c^2a^2(PL+PK)=(a^2b^2+b^2c^2)PM+(b^2c^2+c^2a^2)PK+(c^2a^2+a^2b^2)PL\geqslant 2ab^2c\cdot PM+2abc^2\cdot PK+a^2bc\cdot PL=2abcS$, ч.т.д.

Личная устная олимпиада «КОМБИНАТОРИКА И ЛОГИКА». Решения

Младшая лига

1. В коробке лежат карандаши 10 разных цветов, 10 разных размеров, 10 разных производителей, причем для любой пары разных свойств (например, данного цвета и данного производителя) найдется хотя бы один карандаш, обладающий этими свойствами. Верно ли, что всегда можно выбрать четыре карандаша так, что их цвета, размеры и производители попарно различны?

2. В компании, состоящей из 2010 человек, каждый человек являтся либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врет. Люди в компании пронумерованы числами от 1 до 2010. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, 2010$ человек с номером k сказал следующую фразу: «Количество лжецов среди нас является делителем k». Сколько лжецов может быть в такой компании?

3. В клетках таблицы $2 \times n$ (2 строчки) лежит 2^n монеток. Разрешается убрать две монетки из некоторой клетки и положить одну монетку либо клеткой выше, либо клеткой правее. Докажите, что можно действовать так, чтобы в верхнем правом углу оказалась хотя бы одна монетка.

4. На плоскости в точки с целочисленными координатами вбиты гвозди. На плоскость положили вектор длины 2009 таким образом, что он не касается ни одного гвоздя. Можно ли, перемещая его по плоскости, добиться того, чтобы в итоге его направление изменилось на противоположное, и в процессе перемещения он не задел ни одного гвоздя?

5. В стране n городов, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Правительство продало все дороги двум частным фирмам. Докажите, что найдется город, от которого до любого другого города существует путь, проходящий только по дорогам, принадлежащим одной фирме.

Старшая лига

1. В коробке лежат карандаши 10 разных цветов, 10 разных размеров, 10 разных производителей, причем для любой пары разных свойств (например, данного цвета и данного производителя) найдется хотя бы один карандаш, обладающий этими свойствами. Докажите, что всегда можно выбрать три карандаша так, что их цвета, размеры и производители попарно различны.

2. Крестообразный лабиринт представляет собой пересечение двух отрезков длины 2 километра с общей серединой. Близорукий полицейский на бракованном мотоцикле ловит гангстера. Скорость полицейского в 20 раз больше, чем скорость гангстера, но видит он только на расстоянии 1 метр (во все стороны), а повернуть (в том числе развернуться) его мотоцикл может не более 60 раз. Сможет ли полицейский поймать гангстера?

3. Дано 35 множеств, в каждом из которых 27 элементов. Оказалось, что любые три из этих множеств имеют ровно один общий элемент. Докажите, что все множества имеют ровно один общий элемент.

4. При каких $n \geqslant 11$ в клетках таблицы $n \times n$ можно расставить действительные числа так, чтобы сумма чисел в любом квадрате 10×10 была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 11×11 была отрицательной?

5. Имеется n различных предметов и 9 пронумерованных коробок. Сколько существует способов разложить эти предметы в коробки так, чтобы в первой коробке лежало бы столько же предметов, сколько в сумме в коробках со второй по пятую?

Решения.

Младшая лига

1. *Решение.* Отождествим карандаши с тройкой чисел (a, b, c), где a, b и c — числа от 1 до 10. Положим в коробку карандаши вида $(1, b, c)$, $(a, 1, c)$ и $(a, b, 1)$, где параметры a, b и c принимают всевозможные значения. Заметим, что среди любых четырех карандашей найдутся два, у которых единица стоит на одном и то же месте. Значит, по этому признаку они совпадут.

2. *Решение.* Пусть в этой компании m лжецов. Тогда люди с номерами m, $2m$, $3m$, … сказали правду, а остальные солгали. Значит рыцарей ровно $\left[\frac{2010}{m}\right]$. Получаем уравнение на m: $m + \left[\frac{2010}{m}\right] = 2010$. Ясно, что оба слагаемых целые числа, произведение которых не провосходит 2010, так что их сумма может быть равна 2010 только если один из множителей 1. Подходит случай, когда $m = 2009$. *Ответ:* в компании 2009 лжецов.

3. *Решение.* Будем доказывать это утверждение по индукции. База для $n = 1$ очевидна. Теперь докажем переход. Пусть сначала в правом столбике нет ни одной монетки. Тогда все монетки находятся в прямоугольнике $2 \times (n-1)$. Мысленно покрасим эти монетки в красный и синий цвет: каждого цвета будет ровно 2^{n-1} монетка. Применяя индукционное предположение отдельно к красным, отдельно к синим монеткам, получил красную и синюю монетку в правом верхнем уголке прямоугольника $2 \times (n-1)$. Теперь делая операцию с этими двумя монетками, получим требуемое. Теперь, пусть в правом столбике есть монетки. Если их хотя бы две, то все очевидно, пусть монетка ровно одна и в нижней клетке. Тогда будем убирать монеты из левого столбика, пока это возможно. Заметим, что так как всего монет $2^n - 1$ (не считая одной монеты из правого столбика), мы сделаем всего не более $2^{n-1} - 1$ операций с монетами из самого левого столбика. Таким образом, в прямоугольнике $2 \times (n-1)$ (без левого столбца) окажется не меньше $2^{n-1} - 1 + 1 = 2^{n-1}$ монет. Применим к нему предположение индукции, и получится требуемое.

4. *Решение.* Рассмотрим множество пар точек решетки, находящихся на расстоянии не больше 2010. Рассмотрим далее множество направлений векторов соединяющих такие пары. Такие направления назовем *критическими.* Ясно, что множество критических направлений конечно.

Ясно также, что любой вектор можно сколь угодно близко из любого положения по часовой стрелке можно провернуть к критическому направлению. Задача будет решена, если мы покажем, что его можно будет провернуть к следующему критическому направлению.

Рассмотрим линию L критического направления и вектор $\vec{V}$, который надо повернуть против часовой стрелки. Пусть $\vec{V}$ образует с L угол меньше чем любой угол между любыми двумя критическими направлениями, но не совпадает с направлением L. Тогда если он пересекает линию L, он не может попасть ни на какую другую точку решетки, а если он пересекает L не в точке решетки, то он не пересекает ни одну из точек решетки. Поэтому его можно выдвинуть так, чтобы его конец пересекал L не в точке решетки.

После этого будем разворачивать этот вектор далее, зафиксировав начало до сближения с точкой решетки. Это можно сделать до достижения параллельности с L, но затем его можно вращать и далее. При этом его направление будет уходить от направления L по часовой стрелке. Затем будем вращать $\vec{V}$ вокруг этой точки до сближения со следующей точки решетки. Легко видеть, что при этом его направление подойдет к следующему критическому направлению.

Идея второго решения. Найдется 2011 последовательных целых чисел, не представимых в виде суммы двух квадратов (каждое из них будет делиться на свое простое число вида $4k-1$ в первой степени). Пусть r – корень из минимального из них. Тогда вращение отрезка касательной длины 2010 к окружности радиуса r с центром в начале координат даст то что нужно.

5. *Решение.* Применим индукцию по количеству городов. База $n = 2$ очевидна. Предположим, что утверждение уже доказано, если городов не больше $n-1$. Назовем фирмы синей и красной, и забудем про один из городов v. Тогда по индукционному предположению найдется город u, из которого существует одноцветный путь до любого другого города. Если дорога ведет из u в v, то этот город годится для исходной страны. Пусть тогда, без ограничения общности, из v в u ведет красная дорога. Рассмотрим множество A тех городов, до которых из u есть синий путь. Если множество A — пусто, то годится город v, иначе рассмотрим множество городов $W = A \cup \{v\}$. В нем меньше чем n городов (так как среди них нет города v), и, значит, к этому множеству применимо предположение индукции. Пусть w — город в множестве W, из которого есть одноцветные пути до всех других городов этого множества. Если из w до v имеется красный путь, то вершина w подходящая в исходной стране, а если синий — то подходящей в исходной стране является вершина u.

Старшая лига

1. *Решение.* Отождествим карандаши с тройкой чисел (a, b, c), где a, b и c — числа от 1 до 10. Сначала найдем два требуемых карандаша. Действительно, выберем карандаш (пусть это $(1, 1, 1)$), и пусть любой другой карандаш совпадает с ним хоть в одной координате. Так как любая пара свойств сочетается хоть в одном карандаше, это означает что есть все карандаши вида $(1, a, b)$ для $a > 2$ и $b > 2$. Аналогично для карандашей, у которых единица стоит в другом месте. Тогда карандаши $(1, 2, 2)$ и $(2, 1, 3)$ подойдут. Итак, мы выбрали два таких карандаша, и не умаляя общности будем считать, что это карандаши с координатами $(1, 1, 1)$ и $(10, 10, 10)$. Теперь, либо есть карандаш, все координаты которого не 1 и не 10, тогда он годится третим к этой паре, иначе есть карандаши вида $(x, 2, 2)$, $(3, y, 3)$ и $(4, 4, z)$, где x, y и z принимают значения 1 или 10. Очевидно, что три таких карандаша подходят.

2. *Решение.* Проведем рассуждения в общем случае. Пусть длины всех коридоров равны a, а скорость полицейского в n раз больше скорости велосипедиста. Объедем все коридоры (на это потратится пять поворотов), и вернемся в центр. Если гангстер нам не попался, значит он перебрался из одного коридора в другой, а следовательно удалился от центра не далее, чем на $\frac{6a}{n}$. Подберем теперь x так, чтобы объезжая теперь расстояния x от центра мы бы с гарантией поймали гангстера, если он не проходит через центр. Для этого нам достаточно выполнения неравенства $\frac{6a}{n}+\frac{7x}{n}\leqslant x$, откуда $x\geqslant\frac{6a}{n-7}$. Таким образом, каждый раз длина коридора, который надо объехать домножается на $\frac{6}{n-7}$. В нашем случае $a=1000$, а $\frac{6}{n-7}<\frac{1}{2}$. Значит за 10 таких операций мы либо поймаем гангстера, либо он окажется от центра на расстоянии, не превосходящем $1000\cdot\frac{1}{2^10}<1$. Значит, находясь в центре, полицейский его увидит.

3. *Решение.* Рассмотрим два случая. Первый случай: найдется элемент a, лежащий хотя бы в восьми множествах A_1, A_2, …, A_8. Пусть, тем не менее, найдется множество B, которое не содержит a. Заметим, что каждая пара множеств A_i, A_j имеет общий элемент, лежащий в B (по условию). Таких пар множеств имеется 28, следовательно, какой-то элемент B соответствует двум парам. В этих двух парах имеется хотя бы три различных множества A_i, A_j и A_k, которые, таким образом, имеют не менее двух общих элементов: a и найденный выше. Противоречие. Второй случай: каждый элемент принадлежит не более, чем 7 множествам. Рассмотрим одно из наших множеств A_1. Для каждой из C_{34}^2 пар других множеств найдется элемент множества A_1 лежащий в обоих этих множествах. С другой стороны, каждый из 27 элементов множества A_1 соотвествует не более $C_6^2=15$ парам из этих множеств (так как каждый элемент лежит не более, чем в семи множествах). Но $15\cdot 27<C_{34}^2$. Противоречие.

4. *Решение.* Заметим, что в квадрате 19×19 требуемая расстановка существует: поставим центральным квадратик число 100, а в остальные квадратики -1. Тогда ясно, что в квадрате 10×10 сумма равна 1, а в квадрате 11×11 сумма равна -20, что удовлетворяет условиям. Ясно также, что выбирая внутри предъявленного квадрата 19×19 любой квадрат $n\times n$ для $11\leqslant n<18$, получим пример для всех n от 11 до 19. Теперь покажем, что в квадрате 20×20 расставить требуемым способом числа нельзя. Действительно посчитаем следующие числа: сумму чисел во всех квадратах 10×10 и 11×11. Заметим, что каждое число вошло в обе сумму поровну раз. Действительно, пусть клетка имеет координаты (x,y), где x и y не больше 10. Тогда квадратов 10×10, равно как и квадратов 11×11, содержащих эту клетку будет ровно xy клеток. Отсюда ясно, что для квадрата 20×20, а значит и для всех больших квадратов, это невозможно.

5. *Решение.* Пусть в первой коробке ровно k предметов. Тогда количество способов разложить предметы равно $C_n^k\cdot C_{n-k}^k\cdot 4^k\cdot 4^{n-2k}=C_n^k\cdot C_{n-k}^k\cdot 4^{n-k}$. Теперь нам нужно суммировать такие числа по всем допустимым k. Эта сумма будет свободным коэффициентом в выражении $(x+\frac{4}{x}+4)^n$. Последнее равно $\frac{(x+2)^{2n}}{x^n}$. Свободный коэффициент здесь, очевидно, $2^nC_{2n}^n$.

Командная устная олимпиада. Решения

Младшая лига

1. (4) Решите в натуральных числах уравнение: $a!+b!=5^n$.

2. (5) Можно ли разрезать прямоугольник на 2010^{2010} выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая, параллельная одной из сторон прямоугольника, пересекала бы не более 10 многоугольников разрезания?

3. (6) В остроугольный треугольник ABC вписан квадрат со стороной m так, что две его вершины лежат на стороне AB, и по одной вершине на сторонах BC и AC. Обозначим высоту треугольника ABC проведенную из вершины C через h_c, а сторону AB через c. Докажите, что $\frac{1}{h_c}+\frac{1}{c}=\frac{1}{m}$.

4. (6) Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Докажите, что существует бесконечно много натуральных K таких, что уравнение $n+S(n)+S(S(n))=K$ имеет по крайней мере три решения.

5. (8) Можно ли покрасить натуральные числа в 7 цветов так, чтобы для любого натурального a числа a, $2a$, $3a$, …, $7a$ были разных цветов?

6. (9) В неравнобедренном треугольнике ABC отметили точку пересечения медиан M и точку пересечения биссектрис I. Оказалось, что прямая MI перепендикулярна стороне BC. Докажите, что $AB+AC=3BC$.

7. (11) Даны положительные числа x_1, x_2, …, x_n такие, что $x_k\geqslant x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}$ для $k=2,3,\ldots,n$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}\leqslant\frac{n}{2}.$$

8. (11) Пусть A_n — множество всех двоичных последовательностей длины n (то есть последовательностей, состоящих из нулей и единиц). Будем говорить, что две последовательности $a_1\in A_n$ и $a_2\in A_n$ *соседние*, если они отличаются ровно в одном разряде. При каких натуральных n все элементы множества A_n можно раскрасить в n цветов так, чтобы у любой последовательности $a\in A_n$ все ее соседи были разных цветов?

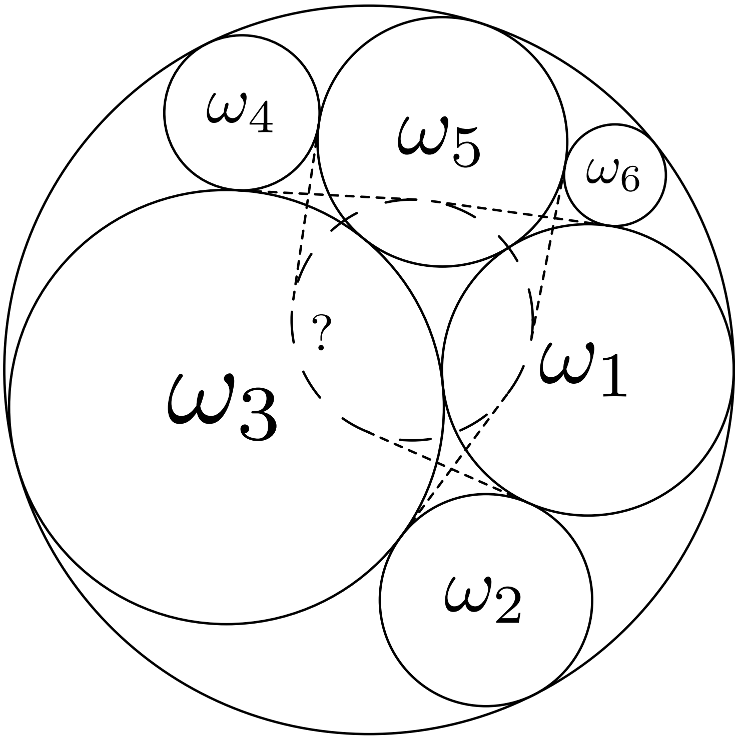

Рис. 10: к условию задачи 9

Старшая лига

1. (3) Известно, что дробная часть действительного числа a равна $\dfrac{1}{a}$. Докажите, что a иррационально.

2. (4) В ряд выписаны 2010 цифр. Разрешается расставлять между цифрами знаки арифметических действий и скобки, причем между соседними цифрами должен стоять хотя бы один знак. Докажите, что таким образом можно получить арифметическое выражение, значение которого будет равно 0.

3. (5) Можно ли покрыть плоскость интервалами так, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одному интервалу (интервал — это отрезок прямой без концов)?

4. (5) Внутри треугольника ABC взяты такие точки P и Q, что $\angle ABP = \angle QBC$ и $\angle ACP = \angle QCB$. Точка D лежит на отрезке BC. Докажите, что $\angle APB + \angle DPC = 180^\circ$ если и только если $\angle AQC + \angle DQB = 180^\circ$.

5. (6) В пространстве даны 2010 векторов. Федя и Душан играют в игру: они по очереди красят один из непокрашенных векторов — Федя в красный, а Душан в синий, начинает Федя. Душан выигрывает если длина суммы синих векторов больше длины суммы красных векторов, в противном случае выигрывает Федя. Докажите, что независимо от векторов у Феди есть выигрышная стратегия.

6. (7) Квадрат разбит на 2010! прямоугольников. Докажите, что найдется прямая, параллельная стороне квадрата, которая пересекает не менее 100 из них.

7. (9) Можно ли покрасить натуральные числа в 50 цветов так, чтобы для любого натурального a, числа a, $2a$, $3a$, $\ldots$, $50a$ были разных цветов?

8. (10) Даны многочлены $f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n$. Оказалось, что многочлен $g(f(x)) - x$ делится на x^{n+1}, а числа $k!\,a_k$ целые для $k = 2, 3, \ldots, n$. Докажите, что числа $k!\,b_k$ целые для $k = 2, 3, \ldots, n$.

9. (11) Дана окружность Ω. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 касаются Ω внутренним образом. Кроме того, окружности ω_1, ω_3 и ω_5 касаются внешним образом друг друга, окружность ω_2 касается окружностей ω_1 и ω_3 внешним образом, окружность ω_4 касается окружностей ω_3 и ω_5 внешним образом, окружность ω_6 касается окружностей ω_5 и ω_1 внешним образом (см. рис. 10). Докажите, что найдется окружность, касающаяся общих внутренних касательных пар окружностей ω_i и ω_{i+1}, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (считаем $\omega_7 = \omega_1$).

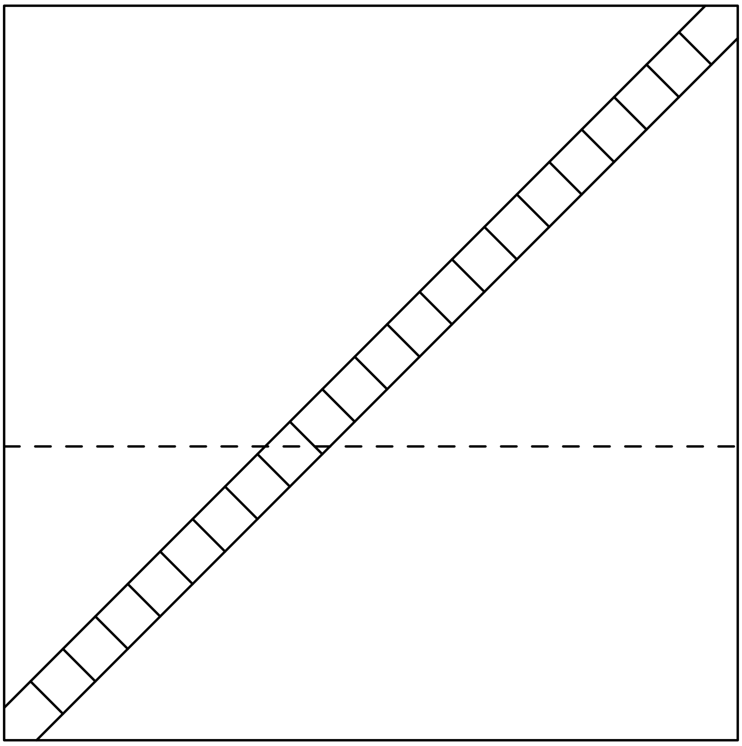

Рис. 11: к решению задачи 2

Решения.

Младшая лига

1. *Решение.* Заметим, что если $a \geqslant 2$ и $b \geqslant 2$, то $a! + b!$ четно, а значит, не может равняться 5^n. Пусть для определенности $a = 1$. Имеем уравнение $1 + b! = 5^n$. Теперь, если $b \geqslant 5$, то $b!$ делится на 5, а значит $b! + 1$ не делится на 5, и не снова не может равняться 5^n. Таким образом, нужно проверить случаи $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$ и $b = 4$. Подходит только случай $b = 4$, в этом случае $n = 2$. Отсюда получаем два ответа: $a = 1$, $b = 4$, $n = 2$ и $a = 4$, $b = 1$, $n = 2$.

2. *Ответ:* да, это возможно. Рассмотрим случай квадрата. Проведем диагональ квадрата и две прямые, паралелльные ей, на маленьком расстоянии от нее с двух сторон. Разобъем образовавшуюся полосу на квадраты и два пятиугольника по краям. Получившееся разбиение, очевидно, подходит. См. рис. 11.
Случай произвольного прямоугольника сводится к случаю квадрата растяжением вдоль одной из осей.

3. *Решение.* Обозначим через P вершину данного квадрата на стороне AC и через Q вершину квадрата на стороне BC (см. рис. 12). Основание высоты из вершины C обозначим H. Соединим точки P и Q с точкой H и напишем равенства

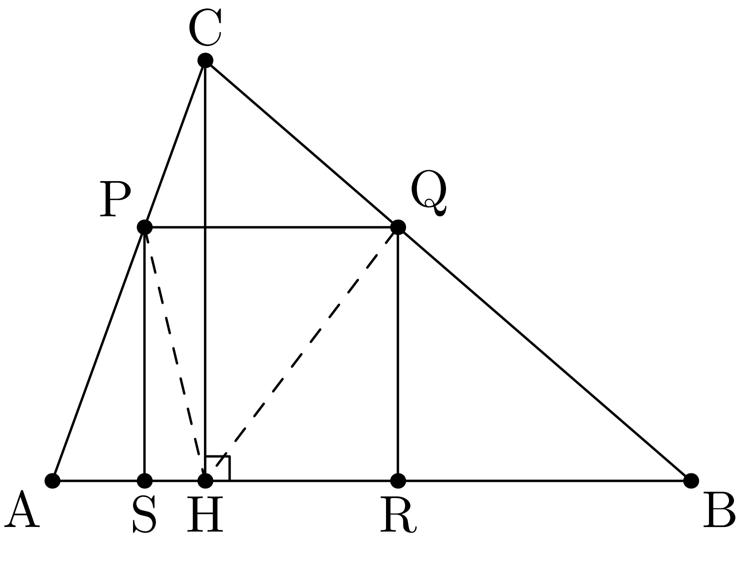

Рис. 12: к решению задачи 3

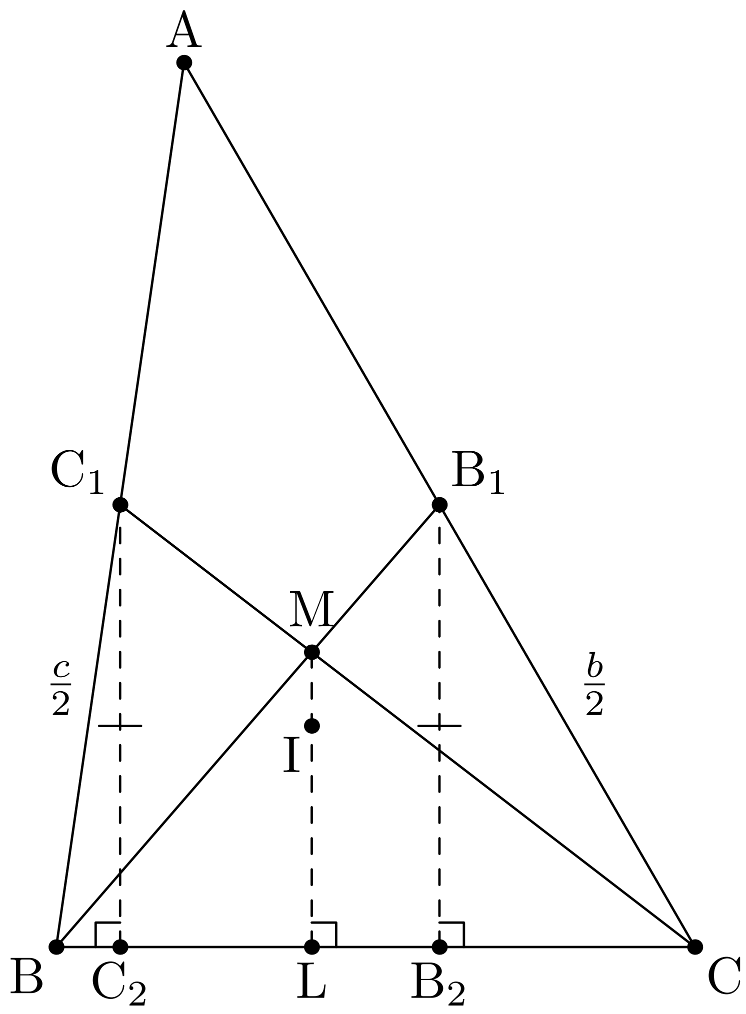

Рис. 13: к решению задачи 6

площадей: $c \cdot h_c = 2S_{ABC} = 2S_{APH} + 2S_{CQHP} + 2S_{HQB} = m \cdot AH + m \cdot CH + m \cdot HB = m \cdot c + m \cdot h_c$ (мы воспользовались тем, что площадь четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна их полупроизведению). Деля это равенство на произведение $m \cdot c \cdot h_c$, мы получаем требуемое.

4. *Решение.* Подставим в это выражение все натуральные n от 1 до 10^k. Заметим, что $n + S(n) + S(S(n)) \leqslant 10^k + 9k + 9k = 10^k + 18k$. Заметим, что получаются только числа, кратные трем, значит результатов получалось не более, чем $\frac{1}{3}(10^k + 18k)$. С другой стороны, если каждый результат получался не более двух раз, мы бы имели такое неравенство:

$$\frac{2}{3}(10^k + 9k) > 10^k,$$

которое, очевидно, нарушается при больших k.

5. *Ответ:* да, можно. Запишем натуральное число n в виде $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot n_1$ и определим цвет числа n как остаток от деления на 7 выражения $2a + 3b + c + 6d$. Легко видеть, что такая раскраска является требуемой.

6. *Решение.* Проведем медианы BB_1 и CC_1 (они пересекутся в точке M), и продлим прямую IM до пересечения со стороной BC, точку пересечения обозначим L (см. рис. 13). Ясно, что эта точка есть точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC. Теперь обозначим стороны треугольника ABC следующим каноническим образом: $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Опустим перпендикуляры B_1B_2 и C_1C_2 на сторону BC, они параллельны прямой IM, кроме того, очевидно, эти перпендикуляры равны (так как равны оба половине высоты из вершины A). Теперь заметим, что $BL = p - b$ (это отрезок от вершины до точки касания), а, значит $BB_2 = \frac{3}{2}(p - b)$ (из подобия треугольников BML и BB_1B_2), откуда $CB_2 = a - \frac{3}{2}(p - b)$, и значит по теореме Пифагора $B_1B_2{}^2 = \frac{b^2}{4} - (a - \frac{3}{2}(p - b))^2$. Аналогично, получаем, что $B_1B_2{}^2 = \frac{c^2}{4} - (a - \frac{3}{2}(p - c))^2$. Приравнивая эти выражения, после нехитрых преобразований (по пути мы сократим на $b - c \neq 0$), получаем требуемое.

7. *Решение.* Будем рассуждать по индукции. База очевидна. Заметим, что мы можем считать, что $x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$, так как такая замена только увеличит левую часть. Теперь мы покажем, что x_{n-1} тоже можно уменьшить до суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2}$, то есть докажем что при уменьшении x_{n-1} сумма растет. Ясно, что надо рассматривать последние два слагаемых: $\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}$. Нехитрыми преобразованиями получаем, что эта сумма записывается в виде:

$$1+\frac{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_1+x_2+\ldots+x_{n-3})+x_{n-2}^2}{x_{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})}.$$

У последнего выражения очевидно, положительный числитель, который с уменьшением x_{n-1} растет, и знаменатель, который с ростом x_{n-1} убывает. Значит вся дробь растет, если x_{n-1} уменьшать. Уменьшив его до суммы $x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}$ мы получим, что последнее слагаемое в нашей сумме равно $1/2$. Сократив его, мы применим предположение индукции.

8. *Ответ:* при $n=2^k$. Сначала докажем, что при других n такая раскраска невозможна. Действительно, пусть при некотором n такая раскаска имеется. Зафиксируем цвет. Так как у каждой последовательности ровно n соседей, значит у каждой последовательности ровно один сосед фиксированного цвета. Значит, всего последовательностей данного цвета ровно $2^n/n$, но так как это число целое, то n — обязательно степень двойки.
Теперь приведем пример покраски в n цветов, где $n=2^k$. Будем строить покраску индуктивно, для $k=1$ она предъявляется очевидно. Теперь пусть такие последовательности для $n=2^{k-1}$ покрашены в $k-1$ цвет нужным образом. Будем красить последовательности для $n=2^k$. Отождествим цвет также с двоичной последовательностью длины k. Выберем первый разряд в зависимомси от четности числа единиц в первой половине данной нам последовательности: если их четное число, то поставим 0, в противном случае 1. Теперь оставшиеся $k-1$ разрядов определим как цвет (определенный ранее) двоичной поразрядной суммы первой половины и второй половины данной последовательности. Несложно видеть, что построенная таким образом раскраска подходит. Действительно, две разные последовательности, соседние с одной и той же, отличаются друг от друга в двух разрядах. Если эти отличия находятся в разных половинах, то их цвет, очевидно, различен (он отличается в первой координате), иначе, двоичные суммы первой и второй половины тоже отличаются в двух разрядах, и, стало быть, их цвета различны по предположению индукции.

Старшая лига

1. *Решение.* Предположим, что число a рациональное и представлено в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Тогда $\frac{1}{a}=\frac{q}{p}>0$ также несократимая дробь, а в несократимой записи дробной части a знаменатель равен q, значит $p=q$ и $a=1$, но это невозможно.

2. *Решение.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ — данная последовательность цифр. Пусть S_k такая последовательность, что $S_1=a_1$ и $S_k=S_{k-1}\pm a_k$ и S_k по модулю не превосходит 9. Это можно сделать, достаточно выбирать знак перед a_k противоположным знаку S_{k-1}. В последовательности S_k встретятся две равных суммы так как всего она принимает не более 19 значений, а значит, в некотором промежутке цифр можно поставить знаки так, чтобы получился 0. Умножив все остальные цифры на данную сумму, мы получим требуемое.

3. *Решение.* Докажем, что это возможно. Несложно получить, что треугольник ABC без границы можно покрыть интервалами, для этого можно взять все интервалы, у которых один конец в точке A, а второй на стороне BC. Начнем с правильного треугольника ABC (см. рис. 14). Продлим AB, BC, CA за точки B, C, A соответственно на длину AB, получим точки A_1, B_1, C_1, которые также образуют правильный треугольник. Продлим A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 за точки B_1, C_1, A_1 до точек A_2, B_2, C_2 на длину A_1B_1. Разобьем треугольник $A_1B_1C_1$ следующим образом: возьмем интервалы B_1B, C_1C, A_1A и разобьем треугольники ABC, A_1B_1B, B_1C_1C и C_1A_1A. Дальнейшее разбиение строится аналогично.

4. *Решение.* Очевидно, что для выполнения каждого равенства можно выбрать только одну точку в качестве точки D, мы покажем, что эти точки совпадают. Пусть Q' — точка симметричная Q относительно BC. Пусть E — точка пересечения BC и PQ', мы докажем что $\angle APB+\angle EPC=180^\circ$ и $\angle AQC=\angle EQB=180^\circ$, этого достаточно для решения задачи (см. рис. 15). Очевидно, что $\angle PBQ'=\angle ABC$ и $\angle PCQ'=\angle ACB$. С помощью теоремы синусов получим следующие равенства:

$$\frac{\sin\angle CPE}{\sin\angle EPB}=\frac{\frac{CQ'}{PQ'}\sin\angle PCQ'}{\frac{BQ'}{PQ'}\sin\angle PBQ'}=\frac{CQ\sin\angle ACB}{BQ\sin\angle ABC}=$$
$$=\frac{AB\sin\angle QBC}{AC\sin\angle BCQ}=\frac{AB\sin\angle ABP}{AC\sin\angle ACP}=\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle APC}.$$

Отношение синусов углов на которые разделен угол $\angle CPB$ однозначно определяется одним из этих углов и оно для углов $\angle CPE$ и $\angle EPB$ совпадает с отношением синусов углов $180^\circ-\angle APB$ и $180^\circ-\angle APC$. Следовательно $CPE=180^\circ APB$. Аналогично доказывается равенство для точки Q, так как если P' — точка симметричная P относительно BC, то QP' проходит через E.

5. *Решение.* Опишем Федину стратегию. Пусть $\vec{v}$ — сумма всех 2010 векторов, если $\vec{v}$ это нулевой вектор, то вне зависимости от раскраски векторов суммы будут равны по длине, а значит Федя выиграет. В другом случае, Федя найдет

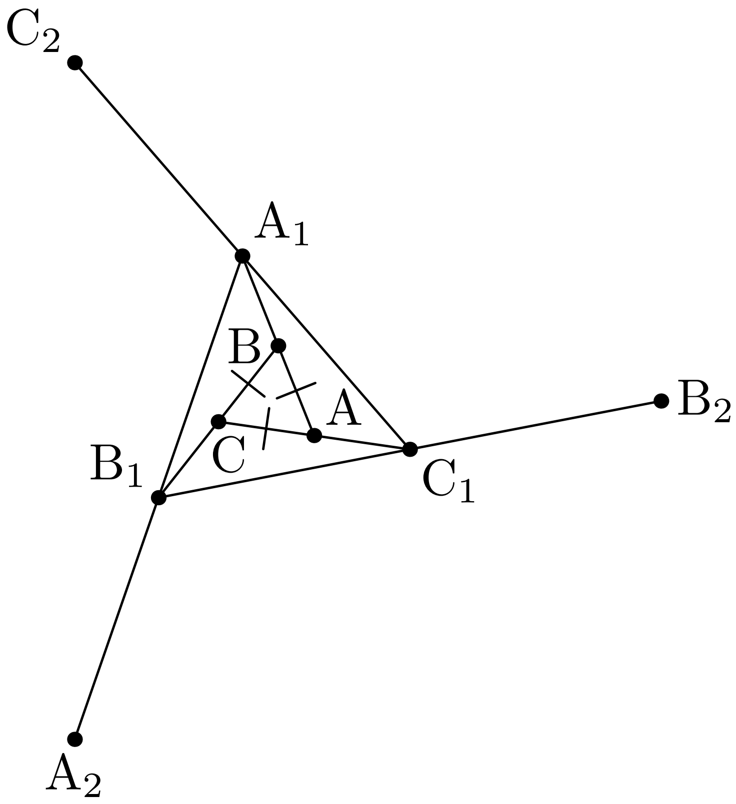

Рис. 14: к решению задачи 3

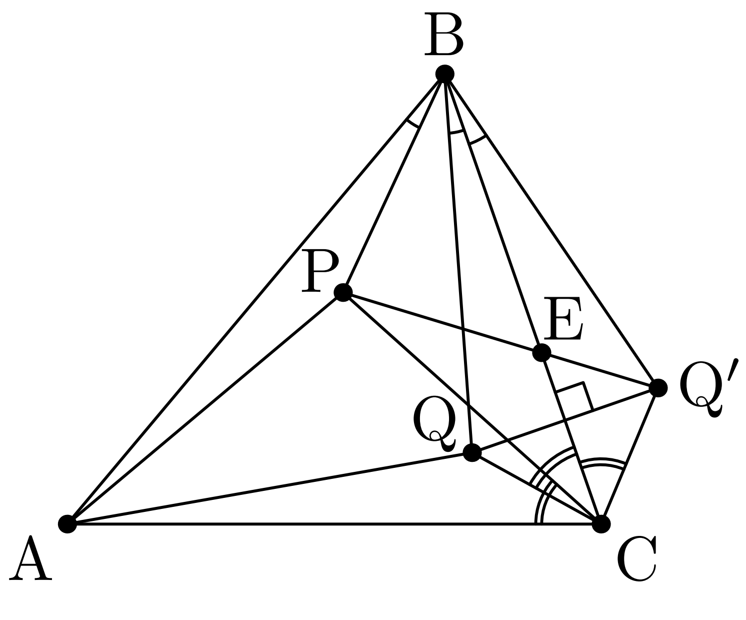

Рис. 15: к решению задачи 4

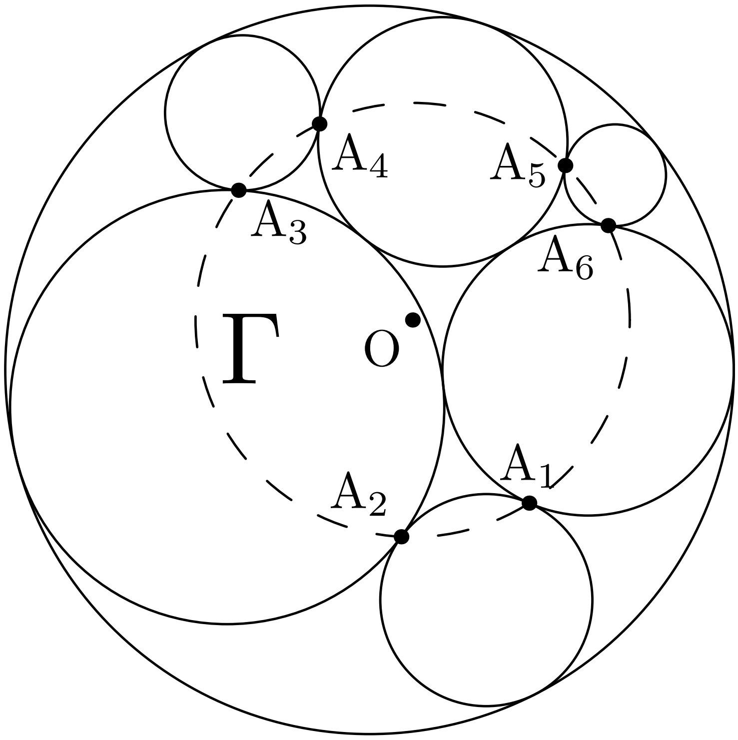

Рис. 16: к решению задачи 9

проекцию каждого вектора на $\vec{v}$ и в свой очередной ход будет красить вектор с максимальной проекцией, который еще не покрашен. В конце игры проекция Фединой суммы на $\vec{v}$ будет не меньше, а ортогональная составляющая одинакова, а значит Федя выиграет.

6. *Решение.* Докажем, что если прямоугольник разбит на $(n+m)!$ прямоугольников, то найдется либо горизонтальная прямая, которая пересекает не менее n из них, либо вертикальная, которая пересекает не менее m. Воспользуемся индукцией по m и n. База $m=1$ или $n=1$ очевидна. Докажем для пары m, n. Рассмотрим нижнюю сторону квадрата, тогда к ней примыкает не более $n-1$ прямоугольников. Рассмотрим вертикальные полосы, содержащие эти прямоугольники; хотя бы одна из этих полос будет содержать части не менее $(n+m-1)!$ прямоугольников кроме нижнего. Из индукционного предположения, примененного к этому прямоугольнику, легко получаем переход индукции. Осталось заметить, что $2010! > 200!$.

7. *Решение.* Так покрасить можно. Заметим, что любое натуральное число единственным образом представимо в виде $n = 101k(101l \pm m)$, где $1 \leqslant m \leqslant 50$. Покрасим n в m-й цвет, легко видеть, что такая покраска удовлетворяет условию задачи.

8. *Решение.* Нам известно, что значение k-й производной многочлена $f(x)$ в нуле целое ($k = 0, 1, 2, \ldots$) и нужно доказать, что значение k-й производной многочлена $g(x)$ в нуле также целое ($k = 0, 1, 2 \ldots, n$). Воспользуемся индукцией по k. База очевидна. Распишем значение k-й производной многочлена $g(f(x))$, оно равно $g^{(k)}(f(x))(f'(x))^k + P(x)$, где в многочлен $P(x)$ входят разнообразные слагаемые из произведений $g^{(l)}(f(x))$ при $1 \leqslant l < k$ и различных производных многочлена $f(x)$. Подставим $x = 0$, тогда $0 = (g(f(x)))^{(k)}|_{x=0} = g^{(k)}(0) + P(0)$, причем $P(0)$ целое по предположению индукции (в случае $k = 1$ слева будет 1, а не 0, но нам важно только то, что это целое число). Отсюда и следует доказываемое.

9. *Решение.* Пусть A_i — точка касания ω_i и ω_{i+1}. Покажем, что все точки A_i лежат на одной окружности Γ (см. рис. 16). Для этого сделаем инверсию, которая переводит окружности ω_1, ω_3, ω_5 в равные, а для этого случая такая окружность очевидно существует. Пусть O — центр Γ, покажем, что O является также центром искомой. Достаточно показать, что O равноудалена от всех проведенных касательных. Расстояния до касательных в A_1 и A_2 равны в силу симметрии окружностей Γ и ω_2 относительно срединного перпендикуляра к A_1A_2; аналогично расстояния до касательных в A_2A_3 равны в силу симметрии Γ и ω_3 относительно срединного перпендикуляра к A_2A_3 и т.д.

Регата. Решения

Младшая лига

Первый тур

1.1. Трудолюбивая Маша для каждого n от 1 до 2010 считает сумму первых n четных чисел и записывает на доске. Хулиган Петя после того, как Маша записывает очередное число, стирает у него все цифры, кроме последней. Какова будет сумма чисел на доске?

1.2. Дан правильный треугольник ABC. Точка D такова, что $\angle BDC = 90^\circ$ и D и A лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Точка M — середина стороны AB. Найдите угол BDM.

1.3. На механико–математическом факультете МГУ учатся n студенток и $2n-1$ студентов (студентки и студенты пронумерованы). Известно, что k-ая студентка знакома со студентами с номерами от 1 до $2k-1$. Сколько существует способов образовать n пар, в каждую из которых входят знакомые студент и студентка?

Второй тур

2.1. Решите в натуральных числах уравнение $\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = a + b + 2$.

2.2. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB и BD — биссектриса. Докажите, что $\angle MDB = 90^\circ$ если и только если $AB = 3BC$.

2.3. Дан пустой граф на $n > 2$ вершинах и натуральное число $k < 4$. Вася и Петя играют в следующую игру: Вася выбирает 3 вершины и проводит между ними ребра, которых ещё нет. Затем Петя стирает любые k ребер графа. Первым ходит Вася. Вася выигрывает, если после очередного хода Пети граф на n вершинах будет связным. При каких k выигрывает Вася?

Третий тур

3.1. Решить в действительных числах систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 + xz + z^2 = 28, \\ y^2 + yz + z^2 = 19. \end{cases}$$

3.2. В треугольнике ABC из вершины A провели высоту AH. Оказалось, что $CH : HB = CA^2 : AB^2 \neq 1$. Какие значения может принимать угол A?

3.3. Окружность разбита $2n$ точками A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_{2n} на $2n$ одинаковых дуг. В точке A_1 стоит фишка. Разрешается передвигать фишку либо соседнюю точку, либо в диаметрально противоположную точку. Сколько существует способов обойти все $2n$ точек по одному разу и вернуться в точку A_1?

Четвёртый тур

4.1. В клетках квадрата 5×5 Вася хочет расставить 25 различных натуральных чисел так, чтобы любые два числа, стоящие в соседних по стороне клетках не были взаимно просты. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в такой таблице?

4.2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Из точек B_1 и C_1 на гипотенузу BC опущены перпендикуляры B_1B_2 и C_1C_2. Чему равен угол B_2AC_2?

4.3. На столе стопкой лежат 11 журналов с номерами от 1 до 11 (сверху — №1, снизу — №11). В 12:00 Дима и Федя сели читать журналы, руководствуясь следующим правилом: каждый перебирает журналы сверху вниз, находит первый непрочитанный и берет его себе, а прочитанный журнал возвращает наверх стопки; если непрочитанных журналов в стопке нет, он ждёт, пока появятся. Дима читает каждый журнал 30 минут, а Федя — 31 минуту. В каком порядке будут лежать журналы в стопке, когда Дима и Федя их все прочитают, если первым в 12:00 брал журнал Дима?

Старшая лига

Первый тур

1.1. Найдите максимальное значение функции $\sin^{13} x + \cos^{14} x$.

1.2. В треугольнике ABC провели высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что $BH : HL : LC = 1 : 1 : 4$ и сторона AB равна 1. Найдите длины остальных сторон треугольника ABC.

1.3. Рассматривается таблица 8×8. *Молнией* называется система из 8 клеток, в которой все клетки расположены в разных столбцах и в разных строках. Вначале во всех клетках таблицы стоят нули. Разрешается прибавлять ко всем клеткам любой молнии по единице. Докажите, что можно добиться того, чтобы все числа были различны.

Второй тур

2.1. Решите в действительных числах систему

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y, \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2. \end{cases}$$

2.2. На окружности даны точки A, B, C, D, X, причем $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXD$. Известны расстояния $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$. Найдите DX.

2.3. Отмечено 2010 целых чисел, попарно не делящихся друг на друга. Число называется *хорошим*, если его квадрат делит произведение каких то двух других отмеченных. Какое максимальное число хороших чисел может быть?

Третий тур

3.1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(ab) = f(a + b)$ для всех иррациональных a, b.

3.2. Дан отрезок AB. Для любой точки C отметим точку B_1 на отрезке AC такую, что $AB_1 : B_1C = 1 : 2$, и точку A_1 на отрезке BC такую, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. Найти геометрическое место точек пересечения AA_1 и BB_1 при условии, что точки A, A_1, B, B_1 лежат на одной окружности.

3.3. Леша и Федя играют в игру. Каждым ходом Леша отмечает в пространстве точку, и соединяет ее отрезком с несколькими из уже отмеченных точек, так, чтобы не образовывалось замкнутых ломаных. После этого Федя красит только что поставленную точку в какой-то цвет так, чтобы каждый из Лешиных отрезков соединяли точки разных цветов. Может ли Леша заставить Федю использовать не менее ста различных цветов?

Четвёртый тур

4.1. Найдите максимум выражения $a/b + b/c$ при $0 < a \leqslant b \leqslant a + b \leqslant c$.

4.2. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$ и $AB \perp AD$), диагонали которой перпендикулярны и пересекаются в точке M. На сторонах AB и CD выбраны такие точки K и L соответственно, что MK перпендикулярно CD, а ML перпендикулярно AB. Известно, что $AB = 1$. Найдите длину отрезка KL.

4.3. В школе учатся n человек, они занимаются в нескольких кружках, в каждом кружке хотя бы два школьника. Оказалось, что если в двух кружках есть какие-то два общих школьника, то в этих кружках занимается разное количество школьников. Докажите, что количество кружков не превосходит $(n-1)^2$.

Решения.

Младшая лига

Первый тур

1.1. *Ответ:* 4020. Заметим, что Маша в сотрудничестве с Петей для числа n напишет на доску последнюю цифру числа $n(n+1)$. Эти последние цифры, как нетрудно убедится перебором, периодичны с периодом 5. Период имеет вид 2, 6, 2, 0, 0.

1.2. *Решение.* Построим на отрезке BC как на диаметре окружность (см. рис. 17). Заметим, что точка D лежит на ней,

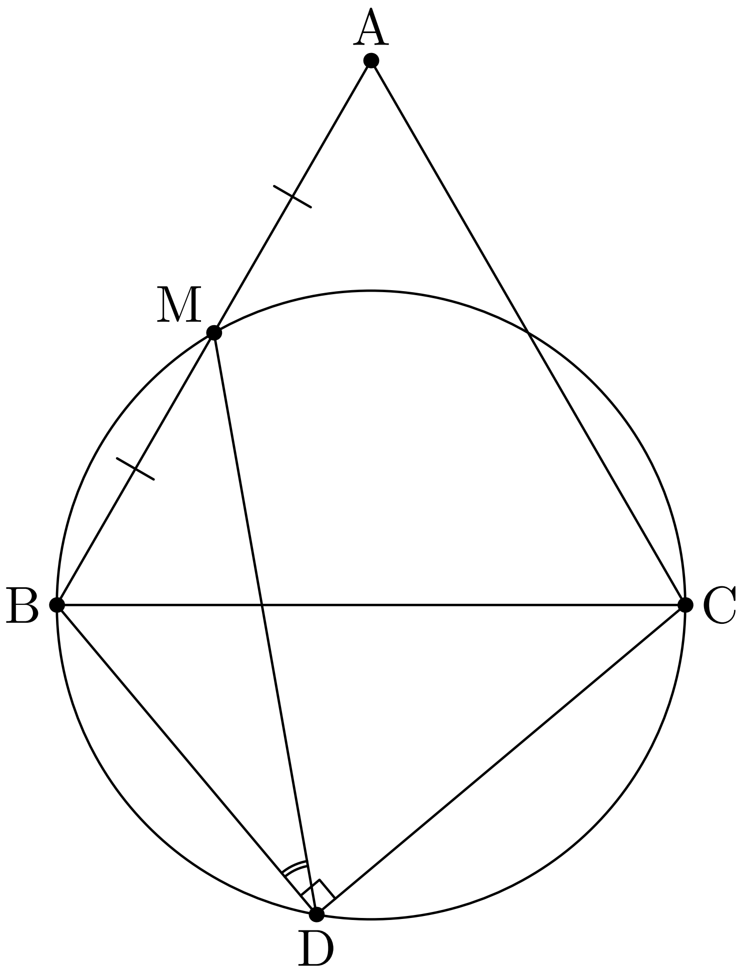

Рис. 17: к решению задачи 1.2

как и точка M. Угол BDM опирается на отрезок BM, который равен радиусу описанной окружности. Это означает, что искомый угол равен $30°$.

1.3. *Решение.* Заметим, что студентка с номером 1 может выбирать себе ровно 1 студента для пары. После этого вторая студентка выбирает себе пару из $3-1=2$ студентов. Вообще говоря, k-ая студентка выбирает себе партнера из $2k-1-(k-1)$ студентов. Таким образом, ответ получается равен $n!$.

Второй тур

2.1. *Решение.* Будем использовать стандартные обозначения: $(a,b) = $ НОД(a,b) и $[a,b] = $ НОК(a,b). Заметим, что из условия следует, что 2 делится на (a,b). Отсюда имеем два случая: $(a,b)=1$ и $(a,b)=2$. В первом случае получаем, что $[a,b]=ab$ и имеем уравнение $ab+1=a+b+2$ или $(a-1)(b-1)=2$. Откуда имеем решения $(3,2)$ и $(2,3)$. Если же $(a,b)=2$, то $[a,b]=ab/2$, и тогда мы имеем уравнение $\frac{ab}{2}+2=a+b+2$, откуда $(a-2)(b-2)=4$. Такое уравнение имеет решения $(6,3)$ и $(4,4)$, но ни одно из них не подходит, так как в обоих случаях $(a,b)\neq 2$.

2.2. См. рис. 18. *Решение.* Пусть сначала $\angle MDB = 90°$. Пусть X — середина MB, тогда $DX = XB = XM$, откуда $\angle XDB = \angle XBD = \angle DBC$, откуда $XD \| BC$. Значит, $3:1 = AX:XB = AD:DC = AB:BC$ (последнее равенство по свойству биссектрисы). Что и требовалось. Теперь, пусть $AB = 3BC$. Как и раньше, обозначим через X середину отрезка MB и проведем DX. Заметим, что $AD:DC = AB:BC = 3:1 = AX:XB$, откуда следует, что $XD\|BC$. Тогда $\angle XBD = \angle DBC = \angle XDB$, что означает, что $XD = XB = XM$. Отсюда получаем, что $\angle MDB = 90°$.

2.3. *Решение.* Заметим, что если $k=3$, то Петя сможет после каждого хода Васи оставлять граф пустым, а если $k=2$, то после каждого хода Васи Петя сможет стирать все ребра выходящие из фиксированной вершины. Докажем, что при $k=1$ Вася сможет выиграть. Он будет, пока это возможно, увеличивать каждым ходом число ребер в графе на два, то есть после ходов и Васи, и Пети, число ребер увеличится хотя бы на 1. Заметим, что пока есть вершина, из которой не проведено хотя бы два ребра, это возможно: будем выбирать треугольник, составленный из этой вершины и двух вершин, с которыми она не соединена. Таким образом, получится граф, в котором степень каждой вершины $\geqslant n-2$. Такой граф останется связным, даже если из него выкинуть ребро.

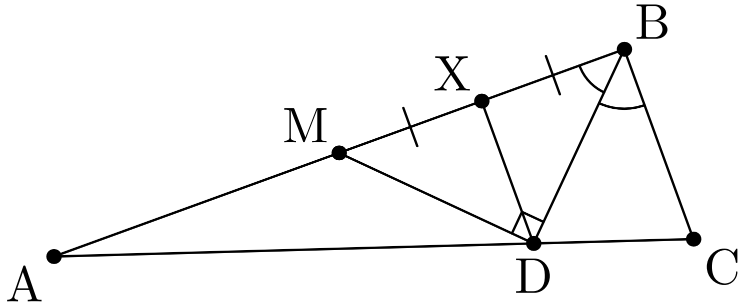

Рис. 18: к решению задачи 2.2

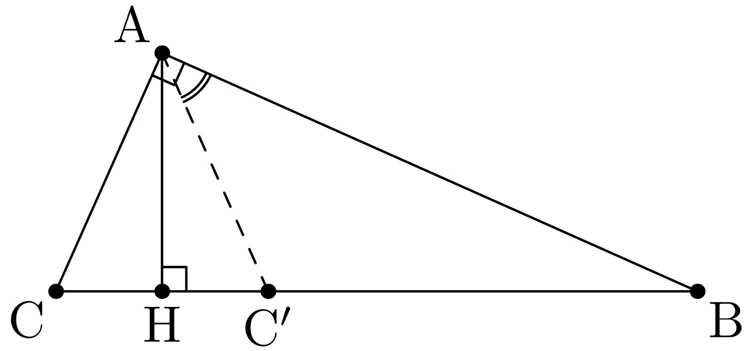

Рис. 19: к решению задачи 3.2

Третий тур

3.1. *Решение.* Вычтем из первого равенство второе, и разложим получившуюся разность на множители. Получим $(y-z)(x+y+z)=9$. Отсюда получаем, что $y-z=\frac{9}{x+y+z}$. Аналогично, вычитая из второго уравнения третье, получим равенство $x-y=\frac{9}{x+y+z}=y-z$. Отсюда, обозначив $y-z=d$, получаем, что $x=y+d$ и $z=y-d$. Теперь подставим в равенство $y-z=\frac{9}{x+y+z}$ новые обозначения и получим, что $3yd=9$ или $yd=3$, откуда $y^2d^2=9$. Подставляя также введенные обозначения в любое из уравнений получим, что $3y^2+d^2=28$. Решая полученную систему относительно y^2 и d^2 получаем, что $y^2=9$, $d^2=1$ или $y^2=1/3$, $d^2=27$. Из равенства $yd=3$, полученного выше, мы видим, что y и d одинаковых знаков. Отсюда получаем четыре решения: $(5,4,3)$, $(-5,-4,-3)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}-3\sqrt{3})$ и $(-(\frac{1}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3}),-\frac{1}{\sqrt{3}},-(\frac{1}{\sqrt{3}}-3\sqrt{3}))$. Очевидно, что все найденные решения подходят.

3.2. *Решение.* Разберем сначала случай, когда точка H оказалась на отрезке BC (см. рис. 19). Тогда несложно видеть, что при движении точки A по прямой, перпендикулярной отрезку BC, отношение $AC^2:AB^2$ будет меняться монотонно. Действительно, $AC^2=CH^2+AH^2$, и $AB^2=BH^2+AH^2$, откуда

$$AC^2:AB^2=\frac{CH^2+AH^2}{BH^2+AH^2}=1+\frac{CH^2-BH^2}{BH^2+AH^2}.$$

Последнее выражение зависит от AH монотонно (мы воспользовались тем, что $CH\neq BH$). Несложно заметить, что если угол A прямой, то требуемое равенство выполняется: $CH:BH=\frac{CH}{AH}\cdot\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AC}{AB}=AC^2:AB^2$ (второе равенство получается из подобия треугольников ACH и ABH треугольнику ABC). Таким образом, для случая, когда точка H лежит на отрезке BC, получаем ответ $\angle A=90°$. Теперь, возьмем прямоугольный треугольник и отразим катет AC относительно высоты AH (считаем катет AC меньшим). Получим точку C', и в треугольнике ABC' выполняется требуемое равенство. Угол BAC' равен разности углов ACH и ABH, то есть может быть любым острым углом. *Ответ:* угол A может быть любым острым, а также прямым углом.

3.3. *Решение.* Рассмотрим соответствующий граф. Будем считать количество циклов, содержащих все вершины (*гамильтоновых циклов*). Так как цикл можно превратить в обход двумя способами, то полученными нами ответ нужно умножить на два. Заметим, что есть один цикл, не содержащих ни одного диаметра. Пусть теперь наш обход содержит хоть один диаметр. Очевидно, что ровно одним не обойтись, поэтому их хотя бы два. Пусть в нашем обходе есть диаметры, выходящие из точек с номерами 1 и k, а из точек с номерами 2, 3, …, $k-1$ диаметры не проведены. Тогда вершины от 1 до k соединены сторонами $2n$-угольника, и, аналогично, вершины от $n+1$ до $n+k$. Все описанные ребра образуют цикл, поэтому он обязан содержать все вершины, значит $k=n$. Таких циклов получается ровно n штук. Наконец, если

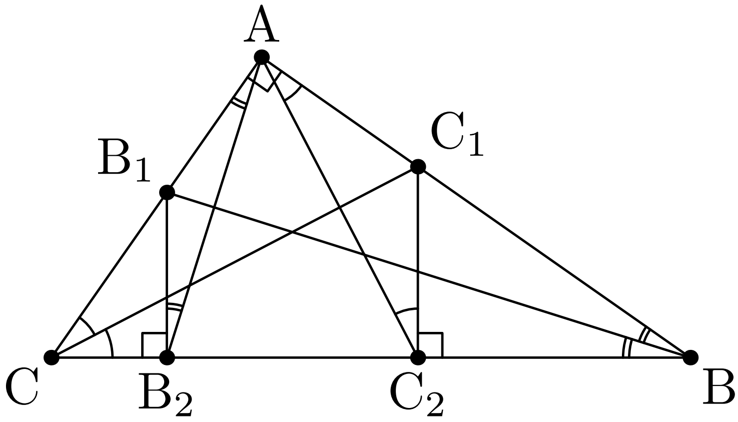

Рис. 20: к решению задачи 4.2

диаметров, описанных выше нет, мы получаем, что проведены все диаметры. Если n четно, то таких циклов нет, а если n нечетно, то таких циклов получается два. *Ответ:* получается $n+1$ циклов для четного n и $n+3$ цикла для нечетного n. Как и написано выше, полученный ответы нужно умножить на два.

Четвёртый тур

4.1. *Решение.* Докажем, что там есть число $\geqslant 33$. Действительно, пусть все числа не больше 32. Заметим, что если на доске есть простое p, то рядом с ним не меньше двух чисел, одно из которых не меньше $3p$. Тогда простые числа 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, а также, очевидно, число 1 не могут встретиться в этой таблице. Но тогда получается, что в таблице не больше $32-8=24$ разных чисел, что не так. Значит, есть число не меньшее 33. Теперь приведем пример.

11	33	3	21	7
22	30	9	12	14
2	4	24	27	6
8	16	20	18	15
26	28	32	10	5

4.2. См. рис. 20. *Решение.* Заметим, что $C_1C_2 = C_1A$ (так как биссектриса CC_1 равноудалена от сторон AC и BC). Значит, треугольник AC_1C_2 равнобедренный, и, следовательно, $\angle C_1AC_2 = \frac{1}{2}\angle BC_1C_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$, так как углы BC_1C_2 и ACB оба дополняют угол ABC до прямого. Аналогично получаем, что $\angle B_1AB_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$, откуда имеем: $\angle C_1AC_2 + \angle B_1AB_2 = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC) = 45°$. Отсюда получаем, что $\angle C_2AB_2 = 45°$.

4.3. *Решение.* Заметим, что через полтора часа и одну минуту Федя и Дима прочитают первые три журнала, и они будут лежать сверху в обратном порядке. После этого они больше не будут использоваться, и, значит, в итоге они окажутся в самом низу в обратном порядке. Аналогичное произойдет со второй и с третьей тройкой журналов, а вот 10 и 11 журнал не поменяются местами (что несложно увидеть простым рассмотрением). Таким образом, окончательный порядок будет `10, 11, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1`.

Старшая лига

Первый тур

1.1. *Ответ:* 1. Заметим, что $\sin^{13} x + \cos^{14} x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, и, например, при $x = \pi/2$ достигается равенство.

1.2. *Ответ:* $AC = 2$, $BC = 3/\sqrt{2}$. Имеем по свойству биссектрисы $AC : AB = LC : LB = 2$, откуда $AC = 2AB = 2$. Далее, обозначим $BH = x$, тогда $HC = 5x$. По теореме Пифагора для треугольников ABH и AHC получаем $1^2 - x^2 = AH^2 = 2^2 - 25x^2$, $24x^2 = 3$, $x = 1/2\sqrt{2}$, $BC = 3/\sqrt{2}$.

1.3. *Решение.* Пронумеруем молнии числами от 1 до 8!. К клеткам k-ой молнии прибавим единицу 10^k раз. Тогда каждое число станет равным сумме нескольких степеней 10, причем наборы показателей для разных клеток будут различны (так как для любых двух клеток легко предъявить молнию, содержащую одну и не содержащую другую.)

Второй тур

2.1. *Ответ:* $(3,1)$, $(1,1/3)$. Случай $y=0$ не возможен, так что поделим первое уравнение на y, второе на y^2 и обозначим $x+1/y=z$, $x/y=t$. Тогда $z+t=7$, $z^2-t=13$. Отсюда $z^2+z=20$, $z\in\{4,-5\}$. Если $z=4$, $t=3$, получаем $3y+1/y=4$, $y\in\{1,1/3\}$. Находим решения $(3,1)$ и $(1,1/3)$. Если $z=-5$, $t=12$, получаем $12y+1/y=-5$, действительных решений нет.

2.2. *Ответ:* $XD=(ac+c^2-b^2)/b$. Отложим точки K, L на продолжениях отрезков XA, XD соответственно так, что $AK=c$, $DL=b$. Ясно, что $AB=BC=CD$ и $\angle XCB=\angle KAB$, так что $\triangle KAB=\triangle XCB$ по двум сторонам и углу между ними, так что $KB=b$. Аналогично $CL=c$, и равнобедренные треугольники XCL и LBK подобны по углу при основании, так что $(XD+b):c=(a+c):b$, $XD=(ac+c^2-b^2)/b$.

2.3. *Ответ:* 2008. *Пример:* числа вида 2^k3^{2009-k}, $k=0,1,\ldots,2009$. Ясно, что все числа, кроме 2^{2010} и 3^{2010} в этом наборе — хорошие. Докажем, что всегда найдется хотя бы два не хороших числа. Во-первых, ясно, что самое большое из наших чисел m — не хорошее (произведение двух других просто меньше, чем m^2). Пусть $n\neq m$ — другое из наших чисел, так как m не кратно n, найдется простой делитель p, входящий в разложение n на простые множители в большей степени, чем в m. Выберем из тех наших чисел, в которых p входит в наибольшей степени, самое большое число k. Заметим, что k отлично от m. Докажем, что число k является хорошим. Последнее следует из того, что если xy кратно k^2 для каких-то наших чисел x,y, то, рассматривая степени вхождения p в x,y,k заключаем, что все они равны, а тогда в силу максимальности k имеем $xy<k^2$ — противоречие.

Третий тур

3.1. *Ответ:* $f=\mathrm{const}$. Пусть p — отрицательное иррациональное число. Тогда $\sqrt{-p}$ — тоже иррациональное число. Положим $a=-b=\sqrt{-p}$, получим $f(0)=f(p)$. Далее, для любого действительного числа x одно из чисел $p=\sqrt{2}+x/\sqrt{2}$ и $q=2\sqrt{2}+x/2\sqrt{2}$ иррационально (если оба рациональны, то $3\sqrt{2}=2q-p$ рационально, а это не так). Выбирая $a\in\{\pm\sqrt{2},\pm2\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\}$ добьемся того, чтобы числа a, x/a были иррациональными, а $a+x/a$ — иррациональным отрицательным. (Если число $x/\sqrt{2}$ иррационально, то выбирая $a\in\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$ добьемся иррациональности числа $a+x/a$, для отрицательности — при необходимости сменим знак у a. Если $x/\sqrt{2}$ рационально, то число $\sqrt{3}+x/\sqrt{3}$ иррационально (даже его квадрат $3+x^2/3+2x$ — иррациональное число), и можно взять $a=\pm\sqrt{3}$.) Теперь подставим $b=x/a$ и получим $f(x)=f(ab)=f(a+b)=f(a+x/a)=f(0)$, поскольку число $a+x/a$ отрицательно и иррационально.

3.2. *Решение.* Обозначим $AB_1=x$, $CA_1=y$. Тогда вписанность четырехугольника AB_1A_1C равносильна тому, что $6x^2=CB_1\cdot CA=CA_1\cdot CB=3y^2$, то есть равенству $y:x=CB:CA=\sqrt{2}$. Таким образом, точка C — произвольная точка окружности Апполония, задаваемой этим равенством, не лежащая на прямой AB. Пусть $P=AA_1\cap BB_1$, $C_1=CP\cap AB$. Заметим, что по теореме Чевы $AC_1:C_1B=1:4$, так что точка C_1 не зависит от C. По теореме ван Обеля

$$CP:PC_1=CA_1:A_1B+CB_1:B_1A=1/2+2=5/2,$$

так что точка P получается из C гомотетией с центром в C_1 и коэффициентом $2/7$, а потому тоже пробегает окружность с двумя выколотыми точками (на прямой AB).

3.3. *Ответ:* да, Леша может заставить Федю использовать любое количество N цветов. Для $N=2$ утверждение очевидно. Покажем, как из Лешиного алгоритма для $N-1$ цвета получить алгоритм для N цветов. Пусть Леша повторит алгоритм для $N-1$ цвета $N-1$ раз, всего будет $N-1$ не связных между собой групп. Если Федя использовал ровно $N-1$ цвет (иначе Леша уже достиг своей цели), то в каждой группе использованы все эти цвета. Пусть Леша поставит еще одну точку и соединит ее с точками разных цветов, взятых по одной из каждой группы. Феде придется использовать новый цвет.

Четвёртый тур

4.1. *Решение.* При $a=b=1$, $c=2$ получаем значение $3/2$. Докажем, что это максимум. Имеем

$$\frac{b}{c}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{b}{a+b}-\frac{1}{2}=\frac{b-a}{2(a+b)}\leqslant\frac{b-a}{b}=1-a/b,$$

откуда $b/c+a/b\leqslant 3/2$.

4.2. *Решение.* Пусть P — точка пересечения ML и AB (см. рис. 21). Треугольники AKM и MLD подобны так как $\angle KAM=\angle LMD$ (они дополняют $\angle ABM$ до прямого угла) и $\angle KMA=\angle LDM$ (они дополняют $\angle MCD$ до прямого),

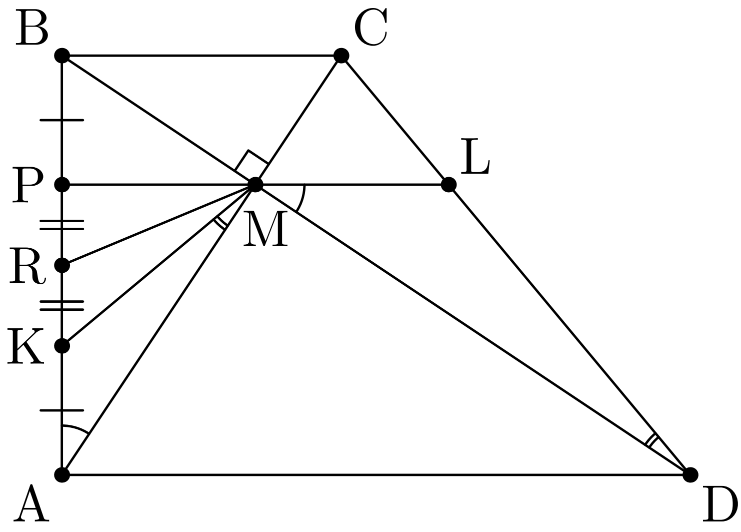

Рис. 21: к решению задачи 4.2

следовательно $\dfrac{AK}{AM} = \dfrac{ML}{MD}$. Также из подобия треугольников AMD и BPM следует равенство $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BP}{PM}$. Эти два равенства, с использованием очевидного равенства $PM = ML$, дают нам равенство отрезков $BP = AK$.
Пусть R середина отрезка PK. Тогда R также является серединой отрезка AB. RM является средней линией треугольника PKL и медианой прямоугольного треугольника ABM, а длина отрезка RM в два раза меньше длины отрезков AB и KL. Значит $KL = AB = 1$.

4.3. *Решение:* Подсчитаем сколько всего может быть кружков ровно с k школьниками ($2 \leqslant k \leqslant n$). Каждая из $\dfrac{n(n-1)}{2}$ пар школьников может ходить одновременно не более чем в один кружок с k школьниками, так как иначе у каких-то двух таких кружков есть не менее двух общих участников; в каждый кружок с k школьниками ходит ровно $\dfrac{k(k-1)}{2}$ различных пар школьников, а значит всего кружков с k школьниками может быть не больше $\dfrac{n(n-1)}{k(k-1)}$. Просуммируем эти значения по всем k от 2 до n, это даст нам оценку на максимально возможное количество кружков.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \\ &= n(n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)^2.\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.