27. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кишињев, Молдавија – 4. мај 2010.

1. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви, доказати неједнакост

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0$$

(Саудијска Арабија)

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а M средиште AC. Нека је C_1 подножје нормале из C на AB, а H_1 тачка симетрична са H у односу на AB. Нека су P, Q и R подножја нормала из C_1 на праве AH_1, AC и CB, редом, а M_1 центар описаног круга троугла PQR. Доказати да тачка симетрична тачки M у односу на M_1 припада дужи BH_1. *(Србија)*

3. Назовимо *траком ширине* w скуп свих тачака равни које се налазе на или између две паралелне праве на међусобном растојању w. Нека је S скуп од n тачака равни такав да се било које три тачке скупа S могу покрити траком ширине 1. Доказати да се S може покрити траком ширине 2. *(Румунија)*

4. За сваки природан број $n \geq 2$, означимо са $f(n)$ збир свих природних бројева не већих од n који нису узајамно прости са n. Доказати да је $f(n+p) \neq f(n)$ за свако такво n и сваки прост број p. *(Турска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Лева страна неједнакости је једнака

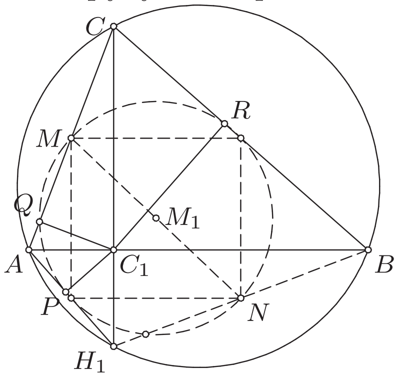
$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

па је довољно показати да важи $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geqslant a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b$. Неједнакост између средина даје $a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^3b^3\cdot a^3c^3}=3a^3b^2c$; сабирање са аналогним цикличним неједнакостима даје тражену.
Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c$.

2. Користићемо следеће једноставно тврђење.

Лема. Нека се у конвексном тетивном четвороуглу $A_1A_2A_3A_4$ дијагонале секу под правим углом у тачки X. Ако је B_i средиште странице A_iA_{i+1}, а X_i подножје нормале из X на ту страницу ($A_5=A_1$), онда осам тачака B_i, X_i ($i=1,2,3,4$) леже на истом кругу.

Доказ. Четвороугао $B_1B_2B_3B_4$ је правоугаоник јер је $B_1B_2 \parallel B_3B_4 \parallel A_1A_3$ и $B_2B_3 \parallel B_4B_1 \parallel A_2A_4$. Како је $\sphericalangle B_3XA_3=\sphericalangle A_4A_3A_1=\sphericalangle A_4A_2A_1=\sphericalangle A_1XX_1$, тачке B_3, X, X_1 су колинеарне, па X_1 лежи на кругу над пречником B_1B_3, тј. на описаном кругу k правоугаоника $B_1B_2B_3B_4$. Слично, X_2, X_3 и X_4 леже на k.



Познато је да тачка H_1 лежи на описаном кругу троугла ABC. По леми, тачке P, Q, R су на кругу над пречником MN, где је N средиште дужи BH_1. Следи да је тачка N симетрична тачки M у односу на M_1, па лежи на BH_1.

3. Међу свим троугловима са теменима у S, посматрајмо онај са највећом површином, рецимо $\triangle ABC$. Нека су A', B', C' тачке симетричне тачкама A, B, C у односу на средишта дужи BC, CA, AB, редом. Тврдимо да све тачке у S леже унутар или на страницама троугла $A'B'C'$. Заиста, ако је $X\in S$ ван $\triangle A'B'C'$, можемо узети без смањења општости да су X и BC на разним странама праве $B'C'$, па $\triangle BCX$ има већу површину од $\triangle ABC$, контрадикција.

Троугао ABC се може покрити траком ширине 1, па се троугао $A'B'C'$ може покрити траком ширине 2, која тако покрива цео скуп S.

4. Ненегативних целих бројева који нису узајамно прости са n и нису већи од n има $n+1-\varphi(n)$, и кад год је r међу њима, то је и $n-r$. Одавде добијамо формулу $f(n)=\frac{1}{2}n(n+1-\varphi(n))$. Претпоставимо да је $f(n)=f(n+p)$. За почетак приметимо да n и $n+p$ нису узајамно прости јер оба броја деле $2f(n)<n(n+p)$; дакле, $n=kp$ за неко $k\in\mathbb{N}$. Једнакост $f(n)=f(n+p)$ постаје $k(kp+1-\varphi(kp))=(k+1)(kp+p+1-\varphi(kp+p))$; другим речима,

$$kp+1-\varphi(kp)=(k+1)x \quad \text{и} \quad kp+p+1-\varphi(kp+p)=kx \tag{1}$$

за неко $x\in\mathbb{N}$, $x<p$. Одузимањем добијамо $x=\varphi(kp+p)-\varphi(kp)-p$. Како су $\varphi(kp)$ и $\varphi(kp+p)$ дељиви са $\varphi(p)=p-1$, следи да је $x\equiv -1 \pmod{p-1}$.

Ако је $p=2$ или $p=3$, онда је $x=1$, што у првом случају у (1) даје $\varphi(2k+2)=k+3$, а у другом $\varphi(3k+3)=2k+4$; оба су немогућа јер је $\varphi(2k+2)\leqslant k+1$ и $\varphi(3k+3)\leqslant 2k+2$. Према томе, $p\geqslant 5$ и $x=p-2$, што убацивањем у (1) даје

$$\varphi(kp)=2k+3-p \quad \text{и} \quad \varphi(kp+p)=2k+1+p. \tag{2}$$

Ако $p\mid k$, онда $p\mid\varphi(kp)$, па $p\mid 2k+3$ и одатле $p\mid 3$, што је немогуће; дакле $p\nmid k$. Слично, $p\nmid k+1$. Одавде је $\varphi(kp)=(p-1)\varphi(k)$ и $\varphi(kp+p)=(p-1)\varphi(k+1)$, па из (2) добијамо

$$\varphi(k)+1=\varphi(k+1)-1=\frac{2k+2}{p-1}.$$

Видимо да бар један од бројева $\varphi(k)$, $\varphi(k+1)$ није дељив са 4; означимо тај број са $\varphi(t)$. То је могуће једино ако је $t\in\{1,2,4\}$ или $t\in\{q^i,2q^i\}$ за неки прост број $q>2$ и $i\in\mathbb{N}$. Случајеве $t=1,2,4$ искључујемо директном провером. С друге стране, ако је нпр. $t=k=q^i$, онда $\varphi(q^i)+1=q^{i-1}(q-1)+1$ дели $2q^i+2$, а то је немогуће јер је $q^i+1>q^{i-1}(q-1)+1>\frac{2}{3}(2q^i+2)$. Слично су и остала три случаја немогућа.