# СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

**такмичење ученика средњих школа из математике**

**Нови Сад, 13.04.2009.**

**Први дан**

**1.** Нека су $\alpha$ и $\beta$ углови неједнакокраког троугла $ABC$ код темена $A$ и $B$, редом. Нека симетрале ових углова секу наспрамне странице троугла у $D$ и $E$, редом. Доказати да оштар угао између правих $DE$ и $AB$ није већи од $\frac{|\alpha-\beta|}{3}$. *(Душан Ђукић)*

**2.** Одредити најмањи природан број који је дељив са 2009 и коме је збир цифара једнак 2009. *(Милош Милосављевић)*

**3.** Одредити највећи природан број $n$ за који постоје различити скупови $S_1, S_2, \ldots, S_n$ такви да је:

$1^\circ$ $|S_i \cup S_j| \leqslant 2004$ за свака два цела броја $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и

$2^\circ$ $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ за свака три цела броја $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$. *(Иван Матић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

# СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

**такмичење ученика средњих школа из математике**

**Нови Сад, 14.04.2009.**

## Други дан

**4.** Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A_n$ скуп свих пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да важи

$$k \mid 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \quad \text{за свако } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Одредити број елемената скупа $A_n$. *(Видан Говедарица)*

**5.** Нека су $x, y, z$ позитивни реални бројеви такви да је $xy+yz+zx = x+y+z$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leqslant 1.$$

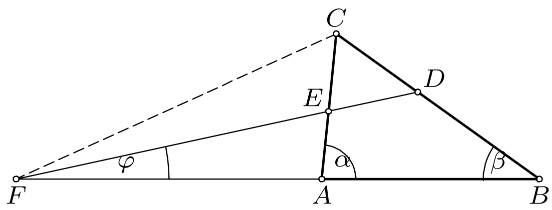
Када се у претходној неједнакости достиже знак једнакости?
*(Марко Радовановић)*

**6.** Нека је $k$ уписана кружница неједнакокраког $\triangle ABC$, чији је центар $S$. Кружница $k$ додирује странице $BC$, $CA$, $AB$ у тачкама $P$, $Q$, $R$, редом. Права $QR$ сече праву $BC$ у тачки $M$. Нека кружница која садржи тачке $B$ и $C$ додирује $k$ у тачки $N$. Описана кружница $\triangle MNP$ сече праву $AP$ у тачки $L$, различитој од $P$. Доказати да су тачке $S$, $L$ и $M$ колинеарне.
*(Ђорђе Баралић)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

# РЕШЕЊА

**1.** Као и обично, означимо $\sphericalangle ACB = \gamma$ и $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, при чему је без смањења општости $a > b$ и $\alpha > \beta$. Нека је $F$ тачка пресека правих $DE$ и $AB$, а $\varphi$ угао између ових правих. Из односа $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ и $\frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}$ лако налазимо $BD = \frac{ac}{b+c}$, $DC = \frac{ab}{b+c}$, $CE = \frac{ab}{a+c}$ и $EA = \frac{bc}{a+c}$. Менелајева теорема за праву $DE$ и троугао $ABC$ даје $AF = \frac{bc}{a-b}$ и $FB = \frac{ac}{a-b}$.




Сада на основу синусне теореме у троугловима $FEA$ и $FDB$ имамо

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\sphericalangle FEA}{\sin\sphericalangle EFA} = \frac{FA}{EA} = \frac{\frac{bc}{a-b}}{\frac{bc}{a+c}} = \frac{a+c}{a-b} \quad \text{и}$$

$$\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\sphericalangle FDB}{\sin\sphericalangle DFB} = \frac{FB}{DB} = \frac{\frac{ac}{a-b}}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a-b},$$

из чега добијамо $\sin\varphi = \sin(\alpha-\varphi) - \sin(\beta+\varphi) = 2\sin\frac{\alpha-\beta-2\varphi}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} < \sin(\alpha-\beta-2\varphi)$. Одавде је $\varphi < \alpha-\beta-2\varphi$, тј. $3\varphi < \alpha-\beta$.

**2.** Пошто је $2009 = 223{\cdot}9+2$, тражени број има бар 224 цифре. Посматраћемо 224-цифрене бројеве $x = \overline{c_{223}c_{222}\dots c_1c_0}$. Јасно је да је $c_{223} \geq 2$. Притом, ако је $c_{223} = 2$ онда је $c_{222} = \cdots = c_0 = 9$ и $x = 3\cdot 10^{223} - 1 \equiv 3\cdot 10 - 1$, а то није дељиво са $2009 = 7^2 \cdot 41$ јер је $x \equiv 1 \pmod 7$.

Нека је сада $c_{223} = 3$. Тада број $x$ има облик $399\dots9899\dots9 = 4\cdot 10^{223} - 10^i - 1$ за неко $i$. Како је $10^5 \equiv 1 \pmod{41}$, имамо $10^i \equiv 1, 10, 18, 16$ или $37 \pmod{41}$ за $i = 0,1,2,3,4 \pmod 5$ редом, и одатле $x \equiv 4{\cdot}10^3 - 10^i - 1 \equiv 22 - 10^i \pmod{41}$ никад није дељиво са 41.

Нека је $c_{223} = 4$. Међу цифрама $c_{222}, \dots, c_0$ налазе се две осмице или једна седмица, док су све остале деветке; у сваком случају, $x = 5\cdot 10^{223} - 10^i - 10^j - 1 \equiv 38 - (10^i + 10^j) \pmod{41}$, где $i$ и $j$ нису обавезно различити. По претходном је $10^i + 10^j \equiv 38 \pmod{41}$ ако и само ако је $(i,j) \equiv (0,4)$ или $(4,0) \pmod 5$. Између осталог, $i \neq j$ и $i, j \leq 220$.

Пробајмо да ставимо $j = 220$ и $i \equiv 4 \pmod 5$. Треба одабрати $i$, ако постоји, тако да $7^2 \mid x = 5{\cdot}10^{223} - 10^{220} - 10^i - 1 \equiv 5{\cdot}10^{13} - 10^{10} - 10^i - 1 \equiv 31 - 10^i \pmod{49}$. Лако налазимо да је $10^i \equiv 31 \pmod{49}$ ако и само ако је $i \equiv 7 \pmod{42}$, што заједно са $i \equiv 4 \pmod 5$ даје као једину могућност $i = 49$. Према томе, тражени број је

$$4998\underbrace{9\dots99}_{170}8\underbrace{99\dots9}_{49}.$$

**3.** Сваки скуп $S_i$ има највише 2003 елемената. Заиста, ако је $|S_i| = 2004$, из услова $1^\circ$ следи да је $S_j \subset S_i$ за све $j$, противно услову $2^\circ$. Посматрајмо скупове

$$G_{\{i,j\}} = \{1, 2, \ldots, 2008\} \setminus (S_i \cup S_j) \quad \text{за } 1 \leq i, j \leq n.$$

Тада је $|G_{\{i,j\}}| \geqslant 4$ и свих $\binom{n}{2}$ скупова $G_{\{i,j\}}$ су међусобно дисјунктни (у супротном, ако $x \in G_{\{i,j\}} \cap G_{\{k,l\}}$, онда $x \notin S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_l$, што је немогуће ако су бар три међу $i, j, k, l$ различита). Следи да је $4\binom{n}{2} \leqslant 2008$, одакле је $n \leqslant 32$.

Конструисаћемо 32 скупа који задовољавају $1^\circ$ и $2^\circ$. Разложимо скуп $\{1, 2, \ldots, 2008\}$ произвољно на $\binom{32}{2} = 496$ (дисјунктних) скупова $G_{\{i,j\}}$, при чему је $|G_{\{i,j\}}| \geqslant 4$ за $1 \leqslant i, j \leqslant 32$, и дефинишимо

$$S_i = \{1, 2, \ldots, 2008\} \setminus \bigcup_{j \neq i} G_{\{i,j\}} \qquad \text{за } i = 1, \ldots, 32.$$

Услов $1^\circ$ је аутоматски задовољен. Осим тога, свако $s \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$ припада највише једном од скупова $G_{\{p,q\}}$, што значи да постоје највише два скупа $S_i$ који га не садрже (то су $S_p$ и $S_q$), па је и услов $2^\circ$ задовољен.

Према томе, одговор је $n = 32$.

**4.** Означимо са $F_n$ број елемената скупа $A_n$. Имамо $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ и $F_3 = 6$.

За $n > 3$, посматрајмо било коју пермутацију $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ у $A_n$. Како $n-1$ дели $2(a_1 + \cdots + a_{n-1}) = n(n+1) - 2a_n \equiv 2 - 2a_n \pmod{n-1}$, следи да је $a_n$ једнако 1, $\frac{n+1}{2}$ или $n$.

Претпоставимо да је $a_n = \frac{n+1}{2}$. Тада $n-2$ дели $2(a_1 + \cdots + a_{n-2}) = n^2 - 1 - 2a_{n-1} \equiv 3 - 2a_{n-1} \pmod{n-2}$. Зато мора бити $2a_{n-1} - 3 = n - 2$, али тада је $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} = a_n$, контрадикција.

Ако је $a_n = n$, онда је $(a_1, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_{n-1})$ бијективно пресликавање у скуп $A_{n-1}$, па оваквих пермутација има $F_{n-1}$.

Ако је $a_n = 1$, онда је $(a_1 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1)$ пермутација на $\{1, \ldots, n-1\}$ која припада скупу $A_{n-1}$ јер је $2\left((a_1 - 1) + \cdots + (a_k - 1)\right) = 2(a_1 + \cdots + a_k) - 2k$ дељиво са $k$ за $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Као и у претходном случају, оваквих пермутација има $F_{n-1}$.

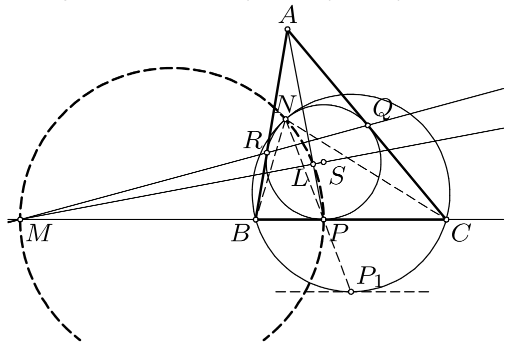
Закључујемо да је $F_n = 2F_{n-1}$ за $n > 3$, што заједно са $F_3 = 6$ даје $F_n = 3 \cdot 2^{n-2}$ за $n \geqslant 3$.

**5.** Коши-Шварцова неједнакост за тројке $\left(x, \sqrt{y}, 1\right)$ и $\left(1, \sqrt{y}, z\right)$ даје $\frac{1}{x^2+y+1} \leqslant \frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}$. Аналогно важи $\frac{1}{y^2+z+1} \leqslant \frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}$ и $\frac{1}{z^2+x+1} \leqslant \frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}$. Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leqslant \frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2} = S.$$

Остаје да се докаже да је $S \leqslant 1$, а то је еквивалентно са $3 + x + y + z \leqslant 2(xy + yz + zx) = 2(x + y + z)$ по услову задатка, тј. $x + y + z \geqslant 3$. Ово, међутим, следи из $x + y + z = xy + yz + zx \leqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}$.
Једнакост важи само за $x = y = z = 1$.

**6.** Посматрајмо хомотетију са центром $N$ која слика круг $k$ у круг $BCN$; нека она слика тачку $P$ у $P_1$. Тангента на круг $BCN$ у $P_1$ је паралелна тангенти на $k$ у $P$, тј. правој $BC$, што значи да је $P_1$ средиште лука $BC$ круга $BCN$. Дакле, $NP$ је симетрала угла $CNB$, па је $\frac{BN}{CN} = \frac{BP}{CP}$. Шта више, по Менелајевој теореми је $\frac{BM}{MC} = \frac{BR}{RA} \cdot \frac{AQ}{QC} = \frac{BP}{PC} = \frac{BN}{NC}$, па је $NM$ спољна симетрала угла $CNB$.




Према томе, $N$ лежи на кругу над пречником $MP$, а $L$ је подножје нормале из $M$ на $AP$. Остаје да се докаже да је $MS \perp AP$.

Нека је $L'$ подножје нормале из $S$ на $AP$. Тачке $A, L', Q, R, S$ леже на кругу $\omega$ над пречником $AS$. Инверзија у односу на $k$ слика кругове $\omega$ и $SPL'$ редом у праве $QR$ и $BC$, па слика тачку $L'$ у $M$. Дакле, $M$ лежи на правој $SL'$, одакле следи тврђење (и $L' \equiv L$).

*Напомена.* Релација $MS \perp AP$ је еквивалентна са $MP^2 + AS^2 = MA^2 + PS^2$ и може се доказати без инверзије: $MP^2 + AS^2 = MP^2 + PS^2 + AR^2 = MS^2 + AQ^2 = MA^2 + SQ^2$ (због $MQ \perp AS$) $= MA^2 + PS^2$.