The 3rd International Mathematical Arhimede Competition

ПРВИ ДАН

Задатак 1. Доказати да за странице троугла ABC важи неједнакост

$$\frac{a^3}{b+c-a}+\frac{b^3}{c+a-b}+\frac{c^3}{a+b-c}\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Румунија

Задатак 2. У троуглу ABC уписани круг са центром у тачки O додирује странице AB, BC и CA у тачкама C_1, A_1 и B_1, редом. Дужи AO, BO и CO секу уписани круг у тачкама A_2, B_2 и C_2, редом. Доказати да је површина троугла $A_2B_2C_2$ дупло мања од површине шестоугла $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$. *Молдавија*

Задатак 3. У унутрашњости конвексног многоугла $A_1A_2\dots A_{2n}$ дата је тачка M. Доказати да барем једна страница многоугла нема заједничких унутрашњих тачака са правама MA_i, $1\leqslant i\leqslant 2n$. *Шпанија*

ДРУГИ ДАН

Задатак 1. Нека су $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\neq n$, $m\neq 0$, $n\neq 0$ дати бројеви. Одредити све функције $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ тако да је

$$f(mx+ny)=mf(x)+nf(y),\quad \text{за све } x,y\in\mathbb{Z}.$$

Румунија

Задатак 2. Одредити све природне бројеве x и y који задовољавају једнакост

$$x^y-y^x=1.$$

Молдавија

Задатак 3. На фудбалском турниру свака екипа игра са сваком од преосталих тачно једну утакмицу и при томе осваја три поена за победу, један поен за нерешен резултат и нула поена за пораз. На крају турнира испоставило се да је збир освојених поена свих екипа 50.

(а) Колико је екипа учествовало на овом турниру?

(б) Колика је највећа могућа разлика између екипе са највећим и најмањим бројем освојених поена?

Србија