26. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Крагујевац, Србија – 30. април 2009.

1. У скупу природних бројева решити једначину

$$3^x - 5^y = z^2.$$

(Грчка)

2. У троуглу ABC, M и N су тачке на страницама AB и AC редом, такве да је права MN паралелна страници BC. Нека је P пресек правих BN и CM. Кружнице описане око $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ секу се у две различите тачке, P и Q. Доказати да је $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle CAP$. *(Молдавија)*

3. Правоугаоник димензија 9×12 је подељен на јединичне квадрате. Црвеном бојом су обојени центри свих јединичних квадрата, осим четири угаона и осам квадрата који имају заједничку страницу са неким од угаоних квадрата. Да ли је могуће означити црвене центре са $C_1, C_2, \ldots, C_{96}$, тако да су задовољена следећа два услова:

1° сва растојања $C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_{95}C_{96}, C_{96}C_1$ су једнака $\sqrt{13}$,

2° затворена изломљена линија $C_1C_2 \ldots C_{96}C_1$ је централно симетрична?

(Бугарска)

4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за које важи

$$f\left(f(m)^2 + 2f(n)^2\right) = m^2 + 2n^2 \qquad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}.$$

(Бугарска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

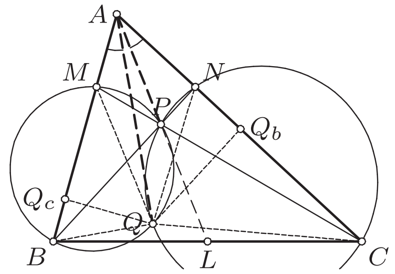
1. Прво приметимо да $2 \mid z$, па $4 \mid z^2 = 3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 \pmod 4$, одакле следи да је x парно, рецимо $x = 2t$. Једначина из задатка постаје $(3^t - z)(3^t + z) = 5^y$, што значи да је $3^t - z = 5^k$ и $3^t + z = 5^{y-k}$ за неки цео број $k \geqslant 0$. Али како $5^k + 5^{y-k} = 2 \cdot 3^t$ није дељиво са 5, мора бити $k = 0$ и

$$2 \cdot 3^t = 5^y + 1.$$

Претпоставимо да је $t \geqslant 2$. Тада $9 \mid 5^y + 1$, што важи само за $y \equiv 3 \pmod 6$. Међутим, тада је $5^y + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 0 \pmod 7$, тј. $7 \mid 5^y + 1$, што је немогуће.

Према томе, $t \leqslant 1$, па сада добијамо јединствено решење $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

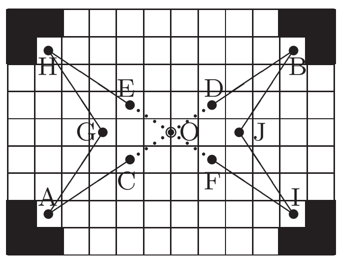
2. Нека права AP сече BC у тачки L. По Чевиној теореми је $\frac{BL}{LC} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AN}{AC} = 1$, тј. L је средиште странице BC. Нека L_b и Q_b (L_c и Q_c) редом означавају подножја нормала из L и Q на AC (односно AB).



Како је $\sphericalangle QBM = \sphericalangle QPC = \sphericalangle QNC$ и аналогно $\sphericalangle QMB = \sphericalangle QCN$, троуглови BQM и NQC су слични. Из ове сличности следи да је $\frac{QQ_b}{QQ_c} = \frac{NC}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{LL_c}{LL_b}$, па је $\triangle Q_bQQ_c \sim L_cLL_b$ и према томе $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle Q_cAQ = \sphericalangle Q_cQ_bQ = \sphericalangle L_bL_cL = \sphericalangle CAL = \sphericalangle CAP$.

3. Поставимо правоугаоник у координатну раван тако да центар поља у i-тој колони и j-тој врсти има координате (i, j). Тачке (i, j) и (i', j') су суседне у путањи $\mathcal{C} = C_1C_2 \cdots C_{96}C_1$ ако и само ако је $\{|i - i'|, |j - j'|\} = \{2, 3\}$.

Центар симетрије путање $\mathcal{C}$ је у тачки $O(6\frac{1}{2}, 5)$. Тачке $A(2, 2)$ и $B(11, 8)$ су симетричне у односу на O и деле $\mathcal{C}$ на два дела $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. Приметимо да су, ако јединичне квадрате обојимо попут шаховске табле, A и B различито обојене, па како су сваке две суседне тачке различитих боја, сваки од делова $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ се састоји из непарног броја дужи. Зато су ови делови различитих дужина, те нису симетрични један другом, што значи да сваки од њих мора бити централно симетричан.



Будући непарне дужине, сваки од делова $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ садржи дуж која је централно симетрична у односу на O. Једине две такве дужи су дужи које спајају тачке $C(5, 4)$ и $D(8, 6)$, односно $E(5, 6)$ и $F(8, 4)$, што значи да су дужи CD и EF садржане у $\mathcal{C}$. Даље, тачка A може да се повеже једино са тачкама C и $G(4, 5)$, па су и дужи CA и AG садржане у $\mathcal{C}$. Аналогно, посматрајући тачке B, $H(2, 8)$, $I(11, 2)$ и $J(9, 5)$, добијамо да је путања $AGHEFIJBDCA$ цела садржана у $\mathcal{C}$, што је немогуће.

4. Јасно је да је функција f инјективна. Дефинишимо $g(n) = f(n)^2$. Дата релација за f постаје

$$g(g(m) + 2g(n)) = (m^2 + 2n^2)^2. \tag{1}$$

Из једнакости $(n+2)^2 + 2(n-1)^2 = (n-2)^2 + 2(n+1)^2$ следи $g(n+2) - 2g(n+1) + 2g(n-1) - g(n-2) = 0$, тј. низ $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ задовољава линеарну рекурентну релацију чије је опште решење

$$g(n) = an^2 + bn + c + d(-1)^n. \tag{2}$$

Убацивањем (2) у (1) за $m = 1$ и сређивањем добијамо $An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E \pm F = 4n^4 + 4n^2 + 1$ за свако n, где је $A = 4a^3$ и $B = 8a^2b$, одакле добијамо $a = 1$ и $b = 0$. Сада (2) постаје $f(n)^2 = n^2 + (c + d(-1)^n)$. Како за $n > |c| + |d|$ имамо $n^2 - n < f(n)^2 < n^2 + n$, тада мора бити $f(n) = n$, тј. $c + d(-1)^n = 0$, што нам даје $c = d = 0$. Одавде је $f(n) = n$ за све n.

Функција $f(n) = n$ очигледно задовољава услов задатка.