СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 12.04.2008.

Први дан

1. У скупу целих бројева решити једначину

$$12^x + y^4 = 2008^z.$$

2. Дат је троугао ABC. Нека су тачке D и E на правој AB такве да је $D - A - B - E$, $AD = AC$ и $BE = BC$. Симетрале унутрашњих углова код темена A и B секу наспрамне странице у тачкама P и Q, редом, а описану кружницу око троугла ABC у тачкама M и N, редом. Права која спаја тачку A са центром кружнице описане око троугла BME и права која спаја тачку B са центром кружнице описане око троугла AND секу се у тачки X. Доказати да је $CX \perp PQ$.

3. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b и c, такве да је $a+b+c=1$, важи неједнакост

$$\frac{1}{bc + a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{ca + b + \frac{1}{b}} + \frac{1}{ab + c + \frac{1}{c}} \leqslant \frac{27}{31}\,.$$

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 13.04.2008.

Други дан

1. Свака тачка равни је обојена са једном од 3 боје. Доказати да постоји троугао за који важи:

1° сва 3 темена тог троугла су обојена истом бојом;

2° полупречник описане кружнице тог троугла је 2008;

3° један угао троугла је два или три пута већи од неког од друга два угла.

2. Нека је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, за $n \geqslant 3$. Доказати да је сваки члан овог низа облика $a^2 + 2b^2$ за неке природне a и b.

3. Нека је $ABCDE$ конвескан петоугао у коме је $AB = 1$, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDE = 60^\circ$ и $\sphericalangle ADB = 30^\circ$. Доказати да је површина петоугла $ABCDE$ мања од $\sqrt{3}$.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.