# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
# УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

## Први разред, А категорија

**1.** Одредити на колико начина се могу изабрати природни бројеви $a$, $b$ и $c$ тако да важи:

$1^\circ$ $a < b < c < 52$;

$2^\circ$ $a$ дели $c$;

$3^\circ$ $b$ дели $c$;

$4^\circ$ $a$ и $b$ нису дељиви квадратом природног броја већег од 1;

$5^\circ$ $c$ јесте дељив квадратом природног броја већег од 1.

**2.** У троуглу $ABC$ је $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и $\sphericalangle CAB = 15^\circ$. Нека је $M$ тачка на полуправој $BC$ таква да је $\overrightarrow{BM} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$. Одредити углове троугла $ABM$.

**3.** Одредити остатак при дељењу полинома $x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$ полиномом $(x-1)^3$.

**4.** Око троугла $ABC$ описати једнакостраничан троугао $PQR$ највеће могуће дужине странице ($\triangle PQR$ је описан око $\triangle ABC$ ако је $A \in QR$, $B \in RP$, $C \in PQ$).

**5.** Доказати да постоји природан број $n$ такав да је број $2p^n + 3$ сложен за сваки прост број $p$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

### Први разред, Б категорија

**1.** Нека су $a$ и $b$ природни бројеви. Доказати да је број $(a+b)^6 - a^6$ дељив бројем $a^2 + ab + b^2$.

**2.** Доказати да је број $3^{105} + 4^{105}$ дељив са $49 \cdot 181$.

**3.** Нека је $P$ тачка у унутрашњости $\triangle ABC$, таква да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Нека су $M$ и $K$ подножја нормала из тачке $P$ на странице $BC$ и $AC$, редом. Ако је $D$ средиште странице $AB$, доказати да је $DK = DM$.

**4.** У троуглу $ABC$ је $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и $\sphericalangle CAB = 15^\circ$. Нека је $M$ тачка на полуправој $BC$ таква да је $\overrightarrow{BM} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$. Одредити углове троугла $ABM$.

**5.** Капетан је добио задатак да распореди 12 војника (различитих по висини) у 3 врсте по 4 војника, тако да су испуњени следећи услови:

$1^\circ$ сваки војник је нижи од свих војника који се налазе иза њега (у осталим врстама);

$2^\circ$ сваки војник је нижи од свих војника који се налазе десно од њега (у његовој врсти);

$3^\circ$ у последњој врсти се налазе 4 највиша војника.

На колико начина капетан то може учинити?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

### Други разред, А категорија

**1.** У скупу целих бројева решити $n(n+1)(n+2)=m^2$.

**2.** Нека је $n>1$ природан број, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цели бројеви, тако да важи

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+n^3 \leqslant (2n-1)(a_1+a_2+\ldots+a_n)+n^2.$$

Доказати да су сви $a_i$ ненегативни и да број $a_1+a_2+\ldots+a_n+n+1$ није потпун квадрат.

**3.** У $\triangle ABC$ важи $\sphericalangle CAB = 2\cdot\sphericalangle BCA$. Нека је $N$ центар споља приписане кружнице $\triangle ABC$ који додирује страницу $BC$, а тачка $M$ средиште странице $AC$. Ако је пресек дужи $BC$ и $NM$ тачка $P$, доказати да је $AB=BP$.

**4.** На страницама правилног петоугла $ABCDE$ уочено је $n$ различитих тачака (међу уоченим тачкама могу бити и тачке $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$). Испоставило се да постоји тачно 2008 троуглова чија су сва темена неке од тих тачака (троугао је одређен са три неколинеарне тачке). Колики је најмањи могући број уочених тачака?

**5.** У болницу је доведено 10 оболелих особа. Међу 1 000 флаша у магацину, само у једној се налази лек. Уколико неко од тих особа попије макар једну кап из флаше у којој се налази лек, након 24 сата лекар ће приметити симптоме оздрављења. Лекар има задатак да у року од 24 сата открије флашу у којој се налази лек, да би се припремио за могућу епидемију. Доказати да лекар може да обави свој задатак.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

### Други разред, Б категорија

**1.** У скупу реалних бројева решити

$$|x^2 + x - 2| = 4x + 2.$$

**2.** Нека су $D$, $E$ и $F$ подножја висина из тачака $A$, $B$ и $C$, редом, оштроуглог троугла $ABC$. Доказати да је

$$BD \cdot CD = DE \cdot DF.$$

**3.** У скупу реалних бројева решити

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leqslant 14 \cdot \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}\,.$$

**4.** Познато је да је $3^7 = 2187 > 2048 = 2^{11}$. Доказати да важи

$$(\log_{24} 48)^2 + (\log_{12} 54)^2 > 4.$$

**5.** Колико најмање ђака може бити у групи у којој важи следеће – сваки ђак познаје најмање шест ђака, и не постоје три ђака која се међусобно познају (познанства су узајамна)?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
# УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

## Трећи разред, А категорија

**1.** Положај велике и мале казаљке на сату назива се *двоструко могућим* ако ће заменом места велике и мале казаљке оне опет коректно показивати неко време. Колико има двоструко могућих положаја казаљки?

**2.** Нека је $n > 1$ природан број. Одредити коефицијент уз $x^{\frac{n^2+n-4}{2}}$ у развоју полинома
$$(x+1)^1 \cdot (x+2)^2 \cdot \ldots \cdot (x+n)^n.$$

**3.** У свако поље таблице $8 \times 7$ уписан је број на следећи начин: у поље $(i,j)$ које се налази у пресеку $i$-те врсте и $j$-те колоне уписан је број $i \cdot (2j+1)$. У тако добијеној таблици дозвољено је изабрати било који квадрат $3 \times 3$ или квадрат $4 \times 4$ и повећати за 1 сваки број у пољима изабраног квадрата. Да ли се полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни?

**4.** У скупу природних бројева решити
$$7^x + 12^y = 13^z.$$

**5.** Нека је $d > 0$ реалан број. Конструисати правоугаоник $MNPQ$ дијагонале $NQ = d$ уписан у дати троугао $ABC$, тј. правоугаоник коме страница $MN$ припада правој одређеној са $AB$, а темена $P$ и $Q$ припадају страницама $BC$ и $CA$, редом.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

### Трећи разред, Б категорија

**1.** Доказати да се кружнице

$$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 12 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + y^2 + 2x - 9y + 15 = 0$$

додирују изнутра и одредити једначину њихове заједничке тангенте.

**2.** Нека је $SABC$ тространа пирамида, чији су сви ивични углови код врха $S$ прави и нека је $O$ подножје висине из тачке $S$ на раван $ABC$.

**(а)** Доказати да је $O$ ортоцентар троугла $ABC$.

**(б)** Ако су површине троуглова $ABC$ и $OBC$ једнаке $P_1$ и $P_2$, редом, одредити површину троугла $SBC$.

**3.** У скупу реалних бројева решити

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}\right) \geqslant \operatorname{sgn}\left(\log_x 5^{\sqrt{1-x}}\right)$$

$\left(\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \\ -1, & \text{за } x < 0 \end{cases}\right).$

**4.** Да ли се у равни може конструисати

**(а)** 2006; **(б)** 2007; **(в)** 2008

подударних кружница, тако да свака од њих додирује тачно 3 друге кружнице и никоје две кружнице се не секу?

**5.** Положај велике и мале казаљке на сату назива се *двоструко могућим* ако ће заменом места велике и мале казаљке оне опет коректно показивати неко време. Колико има двоструко могућих положаја казаљки?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

### Четврти разред, А категорија

**1.** Низ природних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан је са $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = 3^{a_n}$ за $n \geqslant 1$.

Одредити последње две цифре броја $a_{2008}$.

**2.** Нека је $ABCDEF$ шестоугао уписан у кружницу полупречника 1, тако да су странице $AB$, $CD$, $EF$ дужине 1. Доказати да средишта страница $BC$, $DE$ и $AF$ формирају једнакостранични троугао.

**3.** Нека су $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ све нуле полинома $x^3 - 9x + 9$. Доказати да је

$$\alpha^2 + \alpha - 6 \in \{\beta, \gamma\}.$$

**4.** У скупу реалних бројева решити

$$2008^{\log_{2006}(x-1)} - 2006^{\log_{2008}(x+1)} = 2.$$

**5.** 100 сијалица је поређано у таблу $10 \times 10$, при чему свака може да буде упаљена или угашена. У једном кораку је дозвољено:

$1^\circ$ променити стања свих сијалица у једној врсти;

$2^\circ$ променити стања свих сијалица у једној колони;

$3^\circ$ упалити произвољну сијалицу која је окружена са 4 упаљене (сијалице које окружују сијалицу $S$ су оне које се налазе на пољима која имају заједничку страницу са пољем на коме се налази $S$).

У почетку су све сијалице угашене. Да ли је могуће низом оваквих корака постићи да све сијалице осим једне у углу и једне њој суседне буду угашене?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
## УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

### Четврти разред, Б категорија

**1.** Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$\sqrt{x-4a+16} - 2 \cdot \sqrt{x-2a+4} + \sqrt{x} = 0.$$

**2.** Ако је $O$ пресечна тачка дијагонала $AC$ и $BD$ правилног петоугла $ABCDE$, доказати да је

$$AO^2 = AC \cdot OC.$$

**3.** Нека су $m$ и $n$ природни бројеви. Доказати да је број $m^{4n+1} - m$ дељив са 30.

**4.** Одредити све комплексне бројеве $z$, тако да тачке које одговарају бројевима $1, z, z^2$ и $z^3$ (не обавезно у датом поретку) чине темена паралелограма.

**5.** У скупу реалних бројева решити

$$\log_{x^2}(2-x^2) + \log_{x^2+5x+7}(5x+7) \leqslant 1.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.