Личная письменная олимпиада «АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ». Решения

Младшая лига

1. Про натуральное число n известно, что последние цифры (цифры единиц) n и n^{2008} совпадают. Обязательно ли совпадают последние цифры чисел n и n^3?

2. Даны различные ненулевые вещественные числа a, b. Докажите, что любой корень уравнения

$$(x+a+b)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$$

является также корнем уравнения

$$(x^7+a^7+b^7)\left(\frac{1}{x^7}+\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}\right)=1.$$

3. Даны натуральные взаимно простые числа $m>1$ и $n>1$. Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями $x_0=m$, $x_k=nx_{k-1}+1$ при натуральных k. Докажите, что числа $x_1,x_2,\ldots,x_m$ не могут все быть простыми.

4. Докажите для положительных чисел a, b, c, d неравенство

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\geqslant abcd(a+b+c+d).$$

Старшая лига

1. Докажите, что если a, b, c — положительные числа такие, что $a<b+c$, то

$$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

2. Найдите все функции $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ такие, что

$$f(a)+f(b)+f(c)$$

делится на $a+b+c$ для любых натуральных (не обязательно различных) a, b, c.

3. Решите уравнение $\cos 17x=20\cos x$.

4. Для простого нечетного числа p положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{x^k}{k}.$$

Докажите, что $f(2)-f(-1)$ представляется несократимой дробью, числитель которой делится на p.

Решения.

Младшая лига

1. Перебором убеждаемся, что если последние цифры n и n^{2008} совпадают, то это либо 0, либо 1, либо 5, либо 6. А значит, они не меняются при возведении в любую степень.

2. Заметим, что $(u+v+w)(1/u+1/v+1/w)-1=\frac{(u+v)(v+w)(u+w)}{uvw}$. Так что правая часть равна 0 только если два из чисел u, v, w противоположны по знаку. Отсюда следует, что в случае $a=-b$ корнем обоих уравнений является любое ненулевое x, а в случае $a\neq -b$ корнями будут $x=-a$, $x=-b$

3. Заметим, что $x_k=(1+n+\ldots+n^{k-1})+n^k\cdot m$. Как известно, при некотором натуральном $k\leqslant m$ выражение $1+n+\ldots+n^{k-1}$ делится на m. Действительно, в противном случае два из таких выражений дают одинаковый остаток при делении на m, а тогда их разность делится на m. Сокращая эту разность на подходящую степень n (что допустимо в силу взаимной простоты) получаем выражение такого же вида, кратное m. Очевидно, при таком k число x_k будет делиться на m и окажется составным, так как $x_k\geqslant x_1=nm+1>m$.

4. Имеем по неравенству о средних $ab(a^3+c^2d+d^2c)\geqslant 3ab\sqrt[3]{a^3\cdot c^2d\cdot d^2c}=3a^2bcd$. Складывая такие неравенства получаем требуемое.

Старшая лига

1. Заметим, что функция $x/(1+x)$ возрастает при $x > 0$, так что $a/(1+a) < (b+c)/(1+b+c) = b/(1+b+c)+c/(1+b+c) < b/(1+b)+c/(1+c)$. Заметим, что из доказанного следует, что если a, b, c — стороны треугольника, то $a/(1+a)$, $b/(1+b)$, $c/(1+c)$ — тоже стороны некоторого треугольника. Поэтому функция $\rho(P,Q) = PQ/(1+PQ)$ задает *метрику* (здесь PQ — длина отрезка с концами P и Q). В этой метрике диаметр всего пространства не больше единицы.

2. Подставим $(a,b,c) = (1, b+1, c)$ и $(a,b,c) = (2,b,c)$ и вычтем. Получим, что $f(1)+f(b+1)-f(2)-f(b)$ делится на $b+c+2$. В силу произвольности c получаем $f(1)+f(b+1)-f(2)-f(b) = 0$, так что $f(b+1)-f(b) = f(2)-f(1) = \mathrm{const}$ так что $f(x) = Ax+B$ с постоянными целыми A, B. Легко видеть, что годится только $B = 0$.

3. Положим $x = \pi/2 - y$, тогда $\cos x = \sin y$, $\cos 17x = \sin(17\pi/2 - 17y) = \sin 17y$. Значит, $\sin 17y = 20 \sin y$. Легко видеть, что $|\sin ny| \leqslant n|\sin y|$ при натуральных n. Это неравенство доказывается по индукции: при $n = 1$ оно очевидно, а далее $|\sin(n+1)y| = |\sin ny \cos y + \sin y \cos ny| \leqslant |\sin ny| + |\sin y| \leqslant (n+1)|\sin y|$ по индукционному предположению. Так что равенство выполняется только при $\sin y = 0$, то есть $y = \pi k$, $x = \pi/2 - \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Заменим в выражении $f(2) = \sum_{k=1}^{p-1} 2^k/k$ каждое выражение 2^k на $\sum_{i=0}^{p-1} C_k^i$ (если $k < p-1$, то некоторые слагаемые равны 0). Поменяем порядок суммирования:

$$f(2) = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{p-1} C_k^i/k \right).$$

Обозначим $\sum_{k=1}^{p-1} C_k^i/k = a_i$. Заметим, что $a_0 = \sum_{k=1}^{p-1} 1/k$ представляется несократимой дробью, числитель которой кратен p (например потому, что $2a_0 = \sum_{k=1}^{p-1}(1/k + 1/(p-k)) = \sum_{k=1}^{p-1} p/(pk-k^2)$ есть сумма несократимых дробей с числителями p). При $p-1 \geqslant i \geqslant 1$ заметим, что

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_k^i/k = \sum_{k=1}^{p-1} C_{k-1}^{i-1}/i = C_{p-1}^i/i$$

(мы воспользовались формулой $C_0^m + C_1^m + \ldots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$ при $n = p-2$, $m = i-1$. Формула может быть доказана индукцией по n или комбинаторно: C_l^m равно количеству способов выбрать $m+1$ число из чисел от 1 до $n+1$ так, что наибольшее из выбранных чисел равно $l+1$. Значит, суммируя по l, получаем общее количество способов выбрать $m+1$ число от 1 до $n+1$.) Теперь заметим, что $C_{p-1}^i \equiv (-1)^i$ по модулю p, это сразу видно из формулы $C_{p-1}^i = (p-1)(p-2)\ldots(p-i)/i!$. Итого по модулю p получаем $a_i \equiv (-1)^i/i$ (сравнение означает, что разность левой и правой частей есть несократимая дробь с числителем, равным p). Суммируя по i, получаем $f(2) \equiv f(-1)$, что и требовалось.

Личная письменная олимпиада «ГЕОМЕТРИЯ». Решения

Младшая лига

1. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle CMB = 100°$. Серединные перпендикуляры к BM и CM пересекают соответственно стороны AB и AC в точках P и Q. Точки P, Q и M лежат на одной прямой. Найдите величину $\angle CAB$.

2. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в полуокружность ω с диаметром AB. Прямые AC и BD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F. Прямая EF пересекает полуокружность ω в точке G, а прямую AB — в точке H. Докажите, что E — середина отрезка GH тогда и только тогда, когда G — середина FH.

3. На плоскости был нарисован остроугольный треугольник ABC, в котором угол $A \neq 60°$. В нем отметили точку пересечения высот H и центр описанной окружности O, затем провели прямые $m = BH$ и $n = CH$. После этого с рисунка стерли все, кроме прямых m, n и точки O (то есть остались две прямые и одна точка). Восстановите треугольник ABC с помощью циркуля и линейки.

4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $\angle DAC = 30°$, $\angle BDC = 50°$, $\angle CBD = 15°$ и $\angle BAC = 75°$. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке P. Найдите величину $\angle APD$.

Старшая лига

1. На плоскости даны две непересекающиеся окружности равного радиуса и точка O — середина отрезка с концами в центрах этих окружностей. Прямая l, параллельная линии центров этих окружностей, пересекает их в точках A, B, C и D. Прямая m, проходящая через O, пересекает их в точках E, F, G и H. Найдите радиус этих окружностей, если известно, что $AB = BC = CD = 14$ и $EF = FG = GH = 6$.

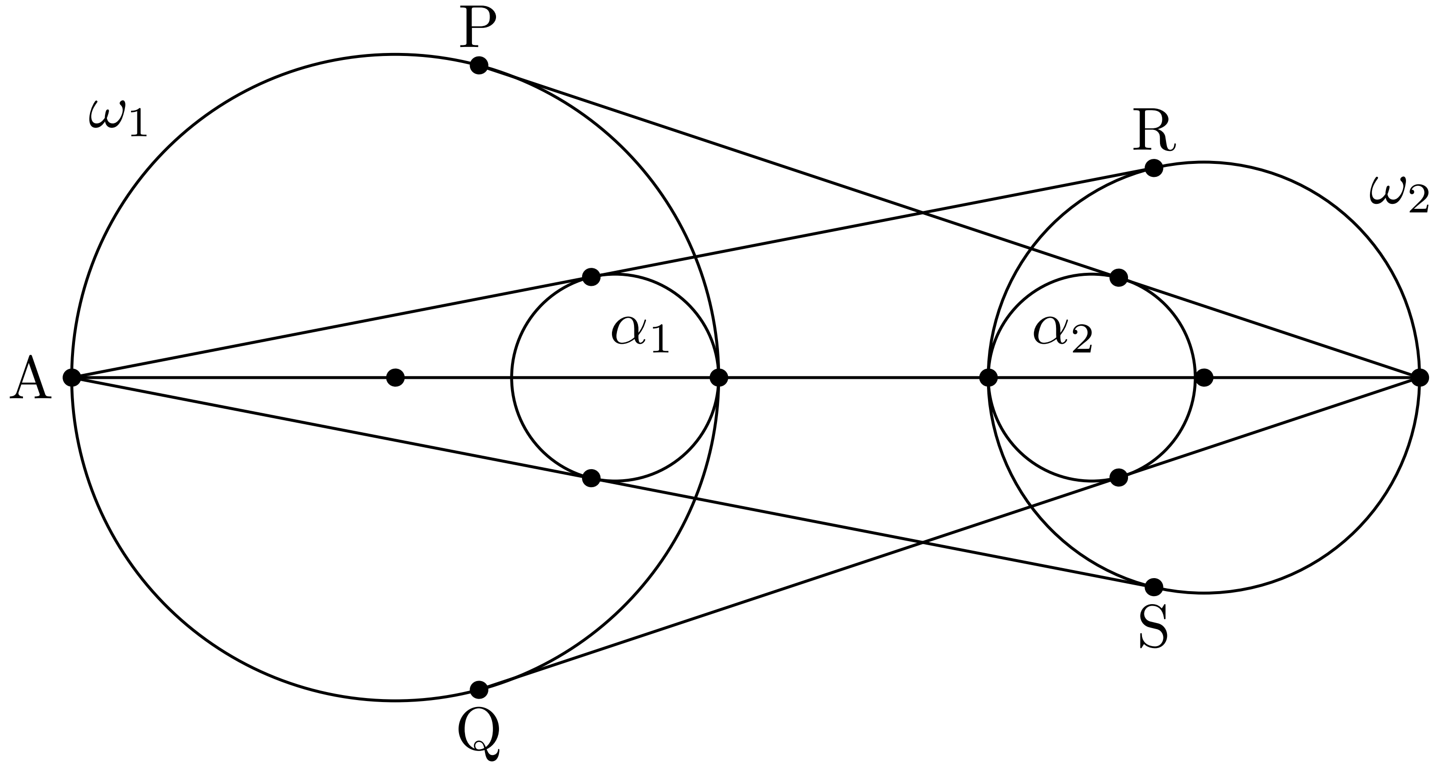

Рис. 1: к условию задачи 2

2. На плоскости нарисовали две окружности ω_1 и ω_2 и точки A и B на них так, что отрезок AB имеет наибольшую возможную длину. AR и AS — касательные из точки A к окружности ω_2. BP и BQ — касательные из точки B к окружности ω_1. Окружность α_1 касается окружности ω_1 внутренним образом и лучей AR и AS. Окружность α_2 касается окружности ω_2 внутренним образом и лучей BP и BQ. Докажите, что радиусы окружностей α_1 и α_2 равны. См. рис. 1.

3. Дан треугольник ABC и точки D и E на сторонах AB и AC такие, что $DE \parallel BC$. Пусть P — произвольная точка внутри $\triangle ADE$. Прямые PB и PC пересекают DE в точках F и G соответственно. Пусть описанные окружности треугольника PDG и треугольника PFE вторично пересекаются в точке Q. Докажите что точки A, P, Q лежат на одной прямой.

4. Существуют ли на плоскости несколько точек и несколько прямых таких, что каждая точка лежит ровно на 2008 прямых и на каждой прямой лежит ровно 2008 точек?

Решения.

Младшая лига

1. $\angle QMC + \angle PMB = 180° - \angle CMB = 80°$. Из равнобедренности треугольников CQM и BPM получаем, что $\angle QCM = \angle QMC$ и $\angle PBM = \angle PMB$. Таким образом, $\angle QCM + \angle PBM = 80°$. Из треугольника CMB также имеем, что $\angle MCB + \angle MBC = 180° - \angle CMB = 80°$. Следовательно, $\angle ACB + \angle ABC = 80° + 80° = 160°$ и $\angle CAB = 180° - \angle ACB - \angle ABC = 20°$.

2. Поскольку $BE \perp AF$ и $AE \perp BF$, то E — ортоцентр треугольника AFB, и $FE \perp AB$. Пусть FG вторично пересекает окружность, описанную около $ABCD$ в точке G'. Поскольку отрезок GG' перпендикулярен диаметру AB, то он делится этим диаметром пополам, то есть $GG' = 2GH$. Так как $\angle ECB = \angle EHB = 90°$, то $ECBH$ вписанный. Заметим, что окружности, описанные около $ABCD$ и $ECBH$ пересекаются в точках B и C, следовательно, BC — их радикальная ось. Точка F лежит на BC, значит, ее степени относительно этих двух окружностей равны. $FG \cdot FG' = FE \cdot FH$; $FG(FG + 2GH) = (FG + GE)(FG + GH)$. Раскрыв скобки, получим $FG \cdot GH = FG \cdot GE + GE \cdot GH = FH \cdot GE$ или $\frac{FG}{FH} = \frac{GE}{GH}$, откуда очевидно следует утверждение задачи.

3. Построим через точку O прямые параллельно n и m. Эти прямые являются серединными перпендикулярами стертого треугольника. Теперь отразим каждую из прямых m и n симметрично относительно серединного перпендикуляра, который ее пересекает. Получившиеся прямые должны проходить через точку A. Следовательно, если они не совпадают, мы построили точку A (параллельны они быть не могут, так как в их пересечении лежит хотя бы одна точка). Если угол между высотами был равен α, то угол между построенными прямыми равняется 3α или $|180° - 3\alpha|$ и, тем самым, будет нулевым только в случае $\alpha = 60^\circ$, но тогда из остроугольности ABC сразу получаем, что $\angle A = 60^\circ$, что противоречит условию задачи. Значит, мы построили точку A. Теперь достаточно отразить ее симметрично относительно уже построенных серединных перпендикуляров, и мы получим точки B и C.

4. Построим точку E на диагонали BD так, что $\angle CED = 30^\circ$. Тогда $\angle BCE = \angle CED - \angle CBD = 15^\circ$. Значит, $EB = EC$. $\angle BEC = 180^\circ - \angle BCE - \angle CBE = 150^\circ = 2\angle BAC$. Следовательно, точка A лежит на окружности с центром E и радиусом EC. Значит, $EC = EA$. Заметим теперь, что $\angle CED = \angle CAD$, поэтому четырехугольник $AECD$ вписанный. Из равенства AE и EC следует, что $\angle ADE = \angle EDC = 50^\circ$. Тогда $\angle APD = 180^\circ - \angle ADE - \angle CAD = 100^\circ$.

Старшая лига

1. Пусть T_1, T_2 — проекции центров O_1 и O_2 окружностей на прямую AD. Тогда T_1 — середина AB, а T_2 — середина CD, поэтому $T_1T_2 = 28$. Поскольку $O_1T_1T_2O_2$ — прямоугольник, то $O_1O_2 = 28$, и из симметрии $OO_1 = 14$. Опустим из O_1 перпендикуляр O_1M на прямую EH. Тогда M — середина EF, и $MF = 3$. Из симметрии $OF = FG/2 = 3$, $MO = MF + OF = 6$. По теореме Пифагора для $\triangle MOO_1$ получаем $O_1M^2 = OO_1^2 - MO^2 = 14^2 - 6^2 = 160$. По теореме Пифагора для $\triangle MFO_1$ получаем $O_1F^2 = O_1M^2 + MF^2 = 160 + 9 = 169$. Таким образом, радиус окружностей равен 13.

2. Пусть r_1, r_2 — радиусы окружностей α_1, α_2, R_1, R_2 — радиусы окружностей ω_1, ω_2, C — точка касания α_1 и ω_1, D — точка касания α_2 и ω_2. Поскольку B — точка пересечения общих внешних касательных к ω_1 и α_2, то эти окружности гомотетичны с центром в B. Коэффициент гомотетии равен с одной стороны $\frac{BD}{AB} = \frac{2R_2}{AB}$, с другой — отношению радиусов $\frac{r_2}{R_1}$. Значит, $r_2 = \frac{2R_2R_1}{AB}$. Аналогично, рассмотрев гомотетию окружностей ω_2 и α_1, получим, что $r_1 = \frac{2R_2R_1}{AB} = r_2$, что и требовалось доказать.

3. Заметим, что PQ — радикальная ось окружностей, описанных около PDG и PFE. Следовательно, нам необходимо доказать, что AP — радикальная ось этих окружностей. Для этого достаточно показать, что R — точка пересечения AP и DE — лежит на радикальной оси. Пусть S — точка пересечения AP и BC. Тогда $\frac{GR}{RF} = \frac{CS}{SB}$, $\frac{ER}{RD} = \frac{CS}{SB}$. Из этих равенств получаем, что $GR \cdot RD = ER \cdot RF$, то есть степени точки R относительно этих окружностей равны, и R лежит на их радикальной оси, что и требовалось доказать.

4. *Ответ:* существует. Сначала индуктивно построим множество векторов a_i, где $1 \leqslant i \leqslant 2008$. На первом шаге выберем произвольный ненулевой вектор a_1. Пусть мы уже построили векторы $a_1, \ldots, a_{i-1}$, $i \geqslant 2$. Рассмотрим все линейные комбинации $p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_{i-1}a_{i-1}$, где p_i — рациональные неотрицательные числа, у которых числитель и знаменатель не превосходят 2007. Теперь выберем в качестве a_i любой вектор, не коллинеарный всем векторам этого множества, это можно сделать, поскольку векторов в нем конечное число. Таким образом, построим набор векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$.
В качестве точек для нашего примера будем рассматривать всевозможные линейные комбинации $n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots + n_{2008}a_{2008}$, где n_i — неотрицательные целые числа, не превышающие 2007. Для каждого $0 \leqslant i \leqslant 2007$ рассмотрим все прямые, проходящие через $n_1a_1 + \ldots + n_{i-1}a_{i-1} + n_{i+1}a_{i+1} + \ldots + n_{2008}a_{2008}$ параллельно a_i, где все n_j — неотрицательные целые числа, не превышающие 2007. Тогда по построению векторов a_i получим, что две точки лежат на одной выбранной прямой тогда и только тогда, когда отличаются только по одному коэффициенту из $n_1, \ldots, n_{2008}$, и, следовательно, на каждой из построенных прямых лежит ровно 2008 точек и каждая точка лежит ровно на 2008 прямых. *Альтернативное решение.* Рассмотрим все целые точки, попадающие в 2008-мерный куб $[0, 2007]^{2008}$ и все прямые проходящие через эти точки параллельно какой-то из осей координат. Очевидно, через каждую из рассматриваемых точек проходит ровно 2008 прямых и на каждой прямой лежит ровно 2008 точек. Осталось лишь подобрать двумерную плоскость так, чтобы при проекции точка не попала на прямую, на которой она не лежит в пространстве, и тогда для полученного множества прямых и точек на плоскости будет выполнено условие задачи.

Личная устная олимпиада «КОМБИНАТОРИКА И ЛОГИКА». Решения

Младшая лига

1. Назовем слово, состоящее только из букв «a», «b», «c», *разнообразным*, если в нем не встречаются подряд два одинаковых подслова. (Например, слово «abcac» — разнообразное, а слово «abcbc» — нет.) Существует ли разнообразное слово из 15 букв?

2. Назовем набор различных натуральных чисел от 1 до 9 *хорошим*, если сумма всех входящих в него чисел четная. Сколько всего хороших наборов?

3. В Черноморске живет n жителей. Все они образовали партию. Затем эта партия разделилась на две непересекающиеся фракции, каждая из которых объявила себя партией. Каждый последующий день каждая из образованных в предыдущий день партий, состоящая хотя бы из двух членов, делилась на две фракции. Фракции, состоявшие хотя бы из двух человек, незамедлительно объявляли себя партиями. Иные партии не образовывались. Когда процесс закончился, каждый житель Черноморска заплатил каждой партии, в которой состоял, членский взнос в 1 рубль. Какой наибольшей могла оказаться сумма взносов?

4. В компании n человек. У каждого есть своя новость. Они начинают посылать телеграммы друг другу. В телеграмме человек передает всю имеющуюся у него информацию. Докажите, что понадобится не менее, чем $2n-2$ телеграмм, чтобы все узнали все новости.

5. Первоначально в целых точках числовой прямой расставлены натуральные числа. На первом шаге между каждыми двумя соседними числами записывается их среднее арифметическое, а исходные числа стираются. На втором шаге с записанными числами проделывается та же операция, и так далее. Оказалось, что все числа, которые мы получаем на каждом шаге, натуральные. Можно ли утверждать, что на некотором шаге все числа равны между собой?

Старшая лига

1. Можно ли разделить квадрат на 2008 прямоугольников так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих сторон?

2. Есть n^3 кубиков единичного размера и краски n цветов. Можно ли раскрасить кубики так, чтобы для каждого из цветов можно было бы сложить куб размером $n \times n \times n$, снаружи полностью окрашенный в этот цвет?

3. В Черноморске живет 2047 жителей. Все они образовали партию. Затем эта партия разделилась на две непересекающиеся фракции, каждая из которых объявила себя партией. Каждый последующий день каждая из образованных в предыдущий день партий, состоящая хотя бы из двух членов, делилась на две фракции. Фракции, состоявшие хотя бы из двух человек, незамедлительно объявляли себя партиями. Иные партии не образовывались. Когда процесс закончился, каждый житель Черноморска заплатил каждой партии, в которой состоял, членский взнос в 1 руб. Какой наименьшей могла оказаться сумма взносов?

4. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть два уже написанных одинаковых числа n и написать числа $n+k$ и $n-k$, при этом $n-k \geqslant 0$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2048?

5. Для каких n можно нарисовать на плоскости полный граф с n вершинами, так чтобы каждая дуга имела с другими дугами не более одной общей внутренней точки и никакие три дуги не имели бы общей внутренней точки? (Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены.)

Решения.

Младшая лига

1. Пример разнообразного слова: *abcabacabcacbc*.
Имеется *бесконечное* разнообразное слово (теорема Туэ). Его построение — довольно трудная задача.

2. *Ответ:* $2^8 = 2^9/2$.
Всего наборов 2^9, покажем, что ровно половина из них — хорошие. В самом деле: поскольку сумма всех чисел от 1 до 9 нечетна, дополнение к хорошему набору плохой и наоборот.

3. Пусть $Max(n)$ — максимально возможная сумма членских взносов, $Min(x)$ — минимально возможная. Пусть k — оптимальное число изначального деления черноморцев на две партии, так чтобы сумма членских взносов была бы, скажем, минимальна. Тогда $Min(n) = Min(k) + Min(n-k) + n$ ибо внутри фракций Черноморцы делятся оптимальным образом. Таким образом, имеет место равенство:

$$Min(n) = \min_k (Min(k) + Min(n-k)) + n \qquad (1)$$

Аналогичным образом, для задачи о максимума членских взносов имеет место равенство

$$Max(n) = \max_k (Max(k) + Max(n-k)) + n \qquad (2)$$

Из формулы (2) непосредственной индукцией легко проверить, что $Max(n) = n(n+1)/2 - 1$.
Равенство для минимума членских взносов несколько сложнее. Пусть $n = 2^k + l; 0 \leqslant l \leqslant 2^k$. Тогда $Min(n) = kn + 2l$. Это равенство также с помощью индукции выводится из формулы (1). Соответственно, $Min(2047) = 11 \cdot 2047$.

Замечание. Можно рассматривать двоичное дерево, связанное с разбиением на партии/фракции и заметить, что если есть две висячие вершины, чьи уровни отличаются не менее чем на 2, то одну из них можно перенести к другой так, чтобы общая сумма членских взносов уменьшилась.

4. *Ответ:* $2n-2$.
Назовем *всезнайкой* человека, который знает все новости. Решение задачи вытекает из следующих наблюдений: **(1)** Первый всезнайка образуется не ранее чем после $n-1$ телеграммы, ибо он должен получить информацию о всех остальных, так что каждый из них должен послать телеграмму. **(2)** После получения одной телеграммы количество всезнаек увеличивается не более чем на 1. **(3)** Поэтому после появления первого всезнайки требуется не менее $n-1$ телеграммы, чтобы все стали всезнайками.

5. *Ответ:* Нельзя.
Например, положим $f(n)=2n^2+1$, где $f(n)$ — число, записанное в n-ю ячейку. Пусть M — операция перехода от одной последовательности чисел к другой, описанная в условии задачи, т.е. $M(f(n))=(f(n)+f(n+1))/2$. Ясно, что

$$M(f+g)=M(f)+M(g) \tag{3}$$

и если $f(n)>0$ при всех n, то $M^{(k)}(f(n))>0$ при всех n, где $M^{(k)}$ — результат применения операции M k раз.
Если $f(n)=2n^2+1$, то $M(f)(n)=2n^2+1+2n+1=f(n)+g(n)$, где $g(n)=2n+1$. Далее $M(g)(n)=2n+2=g(n)+1$. Теперь целочисленность $M^{(k)}(f(n))$ вытекает из равенства 3 с помощью очевидной индукции.

Старшая лига

1. *Ответ:* Можно.
Квадрат можно разбить на 2004 так, что ровно 2 будут иметь общую сторону. Далее один из них можно доразбить на 5 прямоугольных частей так, чтоб никакие две не имели общую сторону между собой а также со стороной большого прямоугольника.

2. Проведем в пространстве 3 системы равноотстоящих на расстояние n попарно параллельных плоскостей, покрашенных в красный цвет. Они разбивают пространство на кубы со стороной n. Система синих плоскостей получается сдвигом этой системы на вектор $(1,1,1)$, зеленых — $(2,2,2)$ и т.д. всего n цветов. Возникает разбиение пространства на кубики с ребром 1, цвет грани есть цвет соответствующей плоскости. В силу периодичности построенной системы, состав любого подкуба $n\times n\times n$ одинаков так что из его кубиков можно изготовить большой куб любого цвета.
Данное решение обобщается на любую размерность.

3. См. решение задачи №3 (из младшей лиги).

4. *Ответ:* 3071.
Можно считать, что операции добавления двух единиц произведены вначале. Таких операций не менее 1024 ибо только такая операция увеличивает итоговую сумму (на 2) а конечная сумма равна 2048.
Покажем, что после этого потребуется 2047 операций. Придадим индивидуальность единицам и рассмотрим траектории единиц, составивших число 2048. Они образуют бинарное дерево с 2048 висячими вершинами. Промежуточные вершины означают операции, и их количество равно количеству висячих вершин без одной.

5. *Ответ:* $n<7$.
Легко построить картинку для $n=6$ и путем стирания ребер получить пример для меньших n. Аналогичным образом, пример для $n+k$ влечет существования примера для n, так что достаточно показать, что полный граф на 7 вершинах не подходит.
Предположим противное. Рассмотрим 7-вершинник, удовлетворяющий условиям задачи. У него 21 ребро, и X точек пересечения ребер. Пусть O есть такая точка пересечения дуг AC и BD.
Рассмотрим четырехугольник, образованный дугами AB, BC, CD, и DA. Его стороны не пересекаются, ибо если ребро входит в треугольник ABO пересекая AB, ей придется выйти из треугольника через AB, AO, либо BO и второй раз пересечь одну из его сторон. За исключением случая, когда ребро входит в ABO через AB оканчиваясь при этом либо вершиной A либо вершиной B. Но тогда малым шевелением можно избавится от этого пересечения.
Можно считать, что мы рисуем граф с минимальным количеством точек пересечения, причем каждому пересечению отвечают 4 ребра, на которых не может быть точек пересечения. Поскольку каждое такое ребро без точки пересечения может быть подсчитано максимум дважды, число таких ребер не превосходит $2X$. Количество же ребер с точками пересечений в точности равно $2X$ так что $4X\leqslant 21$ и значит $X\leqslant 5$.

Рассмотрим граф, вершины которого есть вершины исходного графа плюс точки пересечения ребер. Этот граф плоский. У него $V = 7+X$ вершин, $E = 21+2X$ ребер, и $F \leqslant 2/3E$ граней, поэтому по формуле Эйлера $2 = F-E+V \leqslant V-E/3 = 7+X-(7+2X/3) = X/3$. Следовательно,$6 \leqslant X$. Но мы установили выше, что $X \leqslant 5$, получили противоречие.

Командная устная олимпиада. Решения

Младшая лига

1. (3) Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

2. (5) Найдите все рациональные $x > 0$, $y > 0$, для которых $x + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x}$ — целые числа.

3. (5) Фигура (n, k)-конь каждым ходом смещается на n позиций по одному из двух направлений и на k по другому (обычный конь есть таким образом $(2, 1)$-конь). При данных n и k определите, в какое наименьшее количество цветов можно покрасить бесконечную клетчатую плоскость так, чтобы (n, k)-конь обязательно менял цвет каждым ходом.

4. (7) Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников, все вершины каждого из которых лежат на разных сторонах данного квадрата.

5. (7) Решите систему уравнений $x + y = y^2 z$, $y + z = z^2 x$, $z + x = x^2 y$.

6. (9) Имеется один бильярдный стол и 15 бильярдистов. Каждую партию играют между собой двое, а остальные 13 стоят в очереди. Игрок, проигравший партию, становится в конец очереди, а выигравший играет с тем, кто в очереди был первым. Может ли в какой-либо момент оказаться, что каждый бильярдист выиграл у каждого из остальных ровно одну партию?

7. (12) Две неравные окружности w_1 и w_2 радиусов r_1 и r_2 соответственно пересекаются в точках A и B. На плоскости взята точка O, для которой $\angle OAB$ равен $90°$, и проведена окружность w с центром O, касающаяся внутренним образом окружностей w_1 и w_2. Найдите радиус окружности w.

8. (12) Найдите все натуральные n, имеющие такой делитель d, что $n^2 + d^2$ делится на $nd + 1$.

Старшая лига

1. (3) Три простых числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Леша выписал их друг за другом (в десятичной записи). Могло ли у него получиться простое число?

2. (5) Имеется несколько деревень, некоторые из них соединены дорогами так, что от любой деревни до любой другой можно добраться единственным (если не ездить туда-обратно) способом. Имеется ровно 20 деревень, из которых выходит единственная дорога. Докажите, что можно ввести 10 автобусных маршрутов (каждый маршрут соединяет две деревни кратчайшим путем), пользуясь которыми (в обоих направлениях), можно доехать от любой деревни до любой другой.

3. (6) Две неравные окружности w_1 и w_2 радиусов r_1 и r_2 соответственно пересекаются в точках A и B. На плоскости взята точка O, для которой $\angle OAB$ равен $90°$, и проведена окружность w с центром O, касающаяся внутренним образом окружностей w_1 и w_2. Найдите радиус окружности w.

4. (7) Докажите, что найдутся взаимно простые натуральные числа a и b, большие 10^{2008}, такие, что уравнения $x^2+ax+b = 0$ и $x^2 + 2ax + b = 0$ имеют по два различных целых корня.

5. (8) На Марсе несколько стран, в каждой живет несколько мужчин и столько же женщин. Они собираются переехать каждый в другую страну так, чтобы никакие два человека разного пола из одной страны не переехали в одну и ту же другую страну и чтобы в каждой стране после переезда жило столько же мужчин и столько же женщин, сколько и до. Докажите, что это возможно, если количество жителей каждой страны не превосходит четверти общего населения Марса.

6. (9) Положительные числа a, b, c таковы, что

$$a + \sqrt{b + \sqrt{c}} = c + \sqrt{b + \sqrt{a}}$$

Докажите, что если $a \neq c$, то $40ac < 1$.

7. (10) На плоскости есть близорукий Таракан и Истина. Истина неподвижна, Таракан может за ход сдвинуться в любом направлении ровно на 1 метр, после чего друзья говорят ему, приблизился он к Истине или нет. Изначально Таракан находится на расстоянии 2^n метров от Истины. Докажите, что он может не более чем за $2^n + 100n$ ходов увидеть Истину, то есть приблизиться к ней на расстояние не более метра.

8. (12) На окружности радиуса 1 отмечены точки A_1, A_2, …, A_n. Докажите, что на ней можно найти точку X такую, что

$$XA_1 \cdot XA_2 \cdot \ldots \cdot XA_n \geqslant 2$$

Решения.

Младшая лига

1. *Ответ:* Уменьшилось.

Пусть изначально было n учащихся в лицее. Тогда сначала было $n/2$ мальчиков, а потом — $n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}55 = n \cdot 0{,}495$.

2. *Ответ:* $(\pm 2, \pm\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm 2)$, $(\pm 1, \pm 1)$ (знаки одновременно $+$ или $-$), а также все пары рациональных x, y с условием $x = -\frac{1}{y}$. Заметим, что $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{1}{x}) = xy + \frac{1}{xy} + 2 = m + 2$ — также целое число. Получаем $xy = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}$. Очевидно, что для выполнения условий $\sqrt{m^2-4}$ должен быть рациональным, а это выполнено только если $m^2 - 4$ является точным квадратом. Получаем $m = \pm 2$ (большие квадраты слишком далеко отстоят друг от друга). Значит, $xy = \pm 1$. В случае $xy = 1$ получаем $x = \frac{1}{y}$ и $y = \frac{1}{x}$. Далее, подставляя это в условие, получаем, что $2x$ и $2y$ также целые числа, при этом их произведение равно 4. Далее шесть возможных ответов очевидны.

В случае $xy = -1$ получаем, что любые пары с таким условием подходят.

3. *Ответ:* достаточно двух цветов.

Если n и k разной четности, то подойдет шахматная раскраска. Если n и k оба нечетные, то подойдет раскраска в вертикальные полоски шириной 1. Если n и k оба четные, то конь будет передвигаться только по некоторому подмножеству вершин, с одинаковой четностью координат. Каждое такое подмножество легко раскрасить, исходя из раскраски для $(n/2, k/2)$-коня.

4. Без ограничения общности будем считать, что квадрат единичный; введем систему координат так, что одна из вершин будет находится в точке 0. Пусть тогда вершины треугольника имеют координаты $(0, a)$, $(b, 0)$, $(1, c)$. Тогда точка пересечения медиан треугольника имеет координаты $(1/3 + b/3, a/3 + c/3)$. Так как каждый из параметров изменяется от 0 до 1, то точка пересечения медиан лежит в прямоугольнике $1/3 \leqslant x \leqslant 2/3$, $0 \leqslant y \leqslant 2/3$. Для других вариантов расположения вершин на сторонах получатся прямоугольники, повернутые на $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Их объединение — это крест (объединение двух прямоугольников $1/3 \leqslant x \leqslant 2/3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1/3 \leqslant y \leqslant 2/3$)

5. Заметим, что если x, y, z — решение, то $-x$, $-y$, $-z$ — тоже решение. Также отметим, что если одна из переменных равна 0, то и все остальные тоже равны 0. Далее будем считать, что x, y, $z \neq 0$.

Предположим, что x, y и z — не все одного знака. Тогда без ограничения общности можно считать, что $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$. Приходим к противоречию в первом уравнении. Значит, все переменные — одного знака.

Пусть теперь все переменные положительные. Пусть две переменные совпадают, например, $y = z$. Пусть $x > y$. Тогда $x + y > y + z$, но $y^2 z < z^2 x$. Противоречие. Аналогично, разбирается случай $x < y$. Значит, если две переменные равны, то все переменные равны.

Пусть все переменные различны. Тогда можно без ограничения общности считать, что либо $x > y > z$, либо $x < y < z$. Пусть $x > y > z$. Тогда $y^2 z < x^2 y$, но $x + y > z + x$. Противоречие. Аналогично, если $x < y < z$, то $y^2 z > x^2 y$, но $x + y < z + x$.

Значит, все переменные равны. Получаем три решения: $x = y = z = 0$, $x = y = z = \pm\sqrt{2}$.

6. *Ответ:* может.

Пример. Сначала первый выигрывает 13 партий и проигрывает 15-му игроку. 15-й также выигрывает 13 партий (включая партию с первым), и проигрывает 14-му игроку. 14-й выигрывает 13 партий и проигрывает 13-му игроку. И так далее… 4-й игрок проигрывает 3-му игроку. 3-й игрок выигрывает у всех (14 раз) и проигрывает 4-му. Дальше по цепочке: 4-й проигрывает 5-му, 5-й проигрывает 6-му,…, 15-й проигрывает первому (проверьте: в этот момент очередь вернулась в первоначальное состояние), первый проигрывает 2-му, 2-й выигрывает у всех подряд до конца.

7. *Ответ:* $r_1 + r_2$.

Легко видеть, что окружность ω может касаться ω_1, ω_2 только извне. Не умаляя общности, $r_2 > r_1$. Пусть O_1, O_2 — центры ω_1, ω_2 соответственно. Рассмотрим точку B_0 такую, что $O_1 O_2 B_0 A$ — равнобедренная трапеция с боковыми сторонами $O_1 A = O_2 B_0 = r_1$ и диагоналями $O_1 B_0 = A O_2 = r_2$. Заметим, что окружность с центром B_0 и радиусом $r_1 + r_2$ касается извне ω_1 и ω_2. Докажем, что $B = B_0$ и следовательно $r = r_1 + r_2$. Предположим, что $B \neq B_0$. Тогда $BO_2 + B_0 O_1 =$

$BO_2 + r_2 = r = BO_1 + r_1 = BO_1 + B_0O_2$, то есть в четырехугольнике (трапеции) с вершинами O_1, O_2, B_0, B сумма диагоналей равна сумме боковых сторон. Это невозможно — противоречие.

8. *Ответ:* $n = k^3$, $k \in \mathbb{N}$.
Для таких n можно взять $d = k$. Докажем, что $n = d^3$. Заметим, что если $n^2 + d^2 = (nd+1)m$, то $m - d^2$ кратно n, откуда либо $m \geqslant n + d^2$, но тогда $n^2 + d^2 \geqslant (nd+1)(n+d^2)$, что неверно, либо $m = d^2$, тогда $n = d^3$.

Старшая лига

1. *Ответ:* нет.
Три последовательных члена арифметической прогрессии, если не все делятся на три, то имеют различные остатки по модулю три. Тогда и их суммы цифр имеют различные остатки. Тогда сумма цифр написанного числа делится на три; и само число также делится на 3. С другой стороны, ясно, что само это число больше трех.

2. Найдем такие десять маршрутов, что их суммарная длина максимальна, и каждая из 20 висячих вершин является концом ровно одного из них. Докажем сначала, что любые два маршрута пересекаются. Действительно, пусть это не так, и маршруты AB и CD не пересекаются. Тогда найдем на каждом из них точки E и F, ближайшие к другому маршруту. Тогда исходные маршруты можно записать как AEB и CFD соответственно; при этом понятно, что маршруты $AEFD$ и $BEFC$ будут обладать большей суммарной длиной. Противоречие.
Пусть теперь есть ребро, не покрытое ни одним маршрутом. Тогда оно разделяет граф на две компоненты связности, причем каждый маршрут проходит только по одной компоненте. Противоречие: маршруты из разных компонент связности не будут пересекаться.

3. *Ответ:* $r_1 + r_2$.
Легко видеть, что окружность ω может касаться ω_1, ω_2 только извне. Не умаляя общности, $r_2 > r_1$. Пусть O_1, O_2 — центры ω_1, ω_2 соответственно. Рассмотрим точку B_0 такую, что $O_1O_2B_0A$ — равнобедренная трапеция с боковыми сторонами $O_1A = O_2B_0 = r_1$ и диагоналями $O_1B_0 = AO_2 = r_2$. Заметим, что окружность с центром B_0 и радиусом $r_1 + r_2$ касается извне ω_1 и ω_2. Докажем, что $B = B_0$ и следовательно $r = r_1 + r_2$. Предположим, что $B \neq B_0$. Тогда $BO_2 + B_0O_1 = BO_2 + r_2 = r = BO_1 + r_1 = BO_1 + B_0O_2$, то есть в четырехугольнике (трапеции) с вершинами O_1, O_2, B_0, B сумма диагоналей равна сумме боковых сторон. Это невозможно — противоречие.

4. Рассматривая дискриминанты наших трехчленов получаем, что числа $a^2 - b$ и $a^2 - 4b$ должны быть оба точными квадратами. Положим $a^2 - b = x^2$, $a^2 - 4b = y^2$. Тогда $3a^2 = 4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$. Условие $b > 0$ означает, что $x < a$. Таким образом, выражение $3a^2$ хочется представить в виде произведения двух взаимно простых сомножителей, сумма которых меньше, чем $4a$. Этого несложно добиться. Например, выберем $a = k(k+2)$, $2x - y = (k+2)^2$, $2x + y = 3k^2$. Это приводит к формулам $x = k^2 + k + 1$, $y = k^2 - 2k - 2$, $b = (k-1)(k+1)(2k+1)$. Легко видеть, что при $k = 6n - 1$ числа a и b взаимно просты.

5. Изобразим города секторами круга, расставим мужчин равномерно через равные интервалы вдоль секторов, затем расставим женщин. Пусть α — максимальная длина сектора. Повернем мужчин на α по часовой стрелке, женщин — на α против. Это означает, что каждому человеку придется переехать в город, отвечающий сектору, в который попадет соответствующая точка. Ясно, что полученное переселение удовлетворяет условиям задачи.

6. Не умаляя общности, $a > c$. Тогда

$$(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{c}) = a - c = \sqrt{b + \sqrt{a}} - \sqrt{b + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b + \sqrt{a}} + \sqrt{b + \sqrt{c}}}.$$

Сокращая на $\sqrt{a} - \sqrt{c}$ и приводя к общему знаменателю получаем

$$1 = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b + \sqrt{a}} + \sqrt{b + \sqrt{c}}).$$

По неравенству о средних $\sqrt{a} + \sqrt{c} \geqslant 2(ac)^{1/4}$, $\sqrt{b + \sqrt{a}} + \sqrt{b + \sqrt{c}} \geqslant a^{1/4} + c^{1/4} \geqslant 2(ac)^{1/8}$. Таким образом, $1 \geqslant 4(ac)^{3/8} \geqslant (40ac)^{3/8}$, последнее неравенство следует из того, что $40^{3/8} = 2^{9/8}125^{1/8} < 2^{9/8}128^{1/8} = 4$.

7. Вначале Таракан определит направление на Истину с достаточной точностью, затем он пойдет по этому направлению и увидит Истину.
Определение направления происходит так. Рассмотрим сектор C с углом α, направленный на Истину. Пусть C^* есть перпендикулярный сектор. Таракан делает ход вдоль биссектрисы C^*, и следующим ходом возвращается назад. Ситуации, когда он удалился от Истины отвечает сектор возможных направлений угловой величины не менее $2\alpha/3$, когда

приблизился — не менее $\alpha/2$. (На самом деле при больших расстояниях происходит деление множества неопределенных направлений на величину стремящуюся к двойке).
За первые 8 шагов таракан добивается, чтобы сектор возможных направлений был прямым углом и за $8n$ шагов добивается того, чтобы $2^n \sin\alpha < 1$ после чего выбирает произвольное направление сектора C, идет на Истину и ее находит.

8. Перейдем к комплексной плоскости. Тогда $XA_1 \cdot XA_2 \cdot \ldots \cdot XA_n = |(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)| = |P(x)|$. Раскроем скобки: $P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + a_1a_2\ldots a_n$. Рассмотрим x_k такие, что $x_k^n = a_1a_2\ldots a_n$. Тогда $\sum_{k=1}^n P(x_k) = 2n \cdot a_1a_2\ldots a_n$. (Остальные члены сократятся, так как x_k являются корнями степени n.) Отсюда следует, что один из $|P(x_k)|$ не меньше $|2 \cdot a_1a_2\ldots a_n| = 2$.

Регата. Решения

Младшая лига

Первый тур

1.1. В каком-то году понедельников и сред поровну. Обязательно ли вторников столько же?

1.2. Внутри прямоугольника $ABCD$, стороны которого $AB = CD = 15$ и $BC = AD = 10$, дана точка P такая, что $AP = 9$, $BP = 12$. Найдите CP.

1.3. Рекс, Джульбарс, Тарзан, Барбос и Шарик резвятся на лужайке. Рекс вцепился в того, кто вцепился в Джульбарса, Джульбарс — в того, кто вцепился в Тарзана, Тарзан — в того, кто вцепился в Барбоса, Барбос — в того, кто вцепился в Шарика, Шарик — в того, кто вцепился в Рекса. Кто же вцепился в Рекса?

Второй тур

2.1. Решите уравнение $\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x+3}}} - \sqrt{x} = 1$.

2.2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, такой что

$$AB = AE = DC = BC + DE = 1 \text{ и } \angle ABC = DEA = 90^\circ.$$

Чему равна площадь этого пятиугольника?

2.3. Барон Мюнхгаузен хвастается, что у его жены каждый день улучшается либо лицо, либо фигура, а во все дни кроме, быть может, пятниц — оба эти параметра. Кроме того, за последний год его жена совершенно не изменилась. Может ли Барон оказаться правдивым?

Третий тур

3.1. Сколько чисел от 1 до 1000 могут быть представлены в виде $[2x] + [4x] + [6x] + [8x]$ с положительным x?

3.2. В окружность ω вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Оказалось, что радиус вписанной окружности ABC равен радиусу окружности, касающейся меньшей дуги BC окружности ω и стороны BC в ее середине (см. рис. 2). Найдите отношение сторон треугольника ABC.

3.3. Квадрат 2009×2009 раскрашен в шахматном порядке, центральная клетка черная. Из квадрата вырезали одну черную клетку. Докажите, что остаток можно разрезать на доминошки.

Четвёртый тур

4.1. Пусть p — нечетное число, имеющее ровно n различных простых делителей. Сколько существует решений уравнения $p^2 + b^2 = c^2$ со взаимно простыми b и c (то есть примитивных пифагоровых троек (p, b, c))?

4.2. В выпуклом многоугольнике $A_1A_2\ldots A_{2006}$ противоположные стороны параллельны ($A_1A_2 \parallel A_{1004}A_{1005}, \ldots$). Докажите, что диагонали A_1A_{1004}, A_2A_{1005}, $\ldots$, $A_{1003}A_{2006}$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда когда каждые две противоположные стороны равны.

4.3. Необычная игра в крестики-нолики 3×3. Правила остаются старыми, с той лишь разницей, что каждый игрок на своем ходе может поставить либо крестик, либо нолик. Побеждает тот, кто первый поставит ряд из трех одинаковых фигур. Кто выиграет при правильной игре и почему?

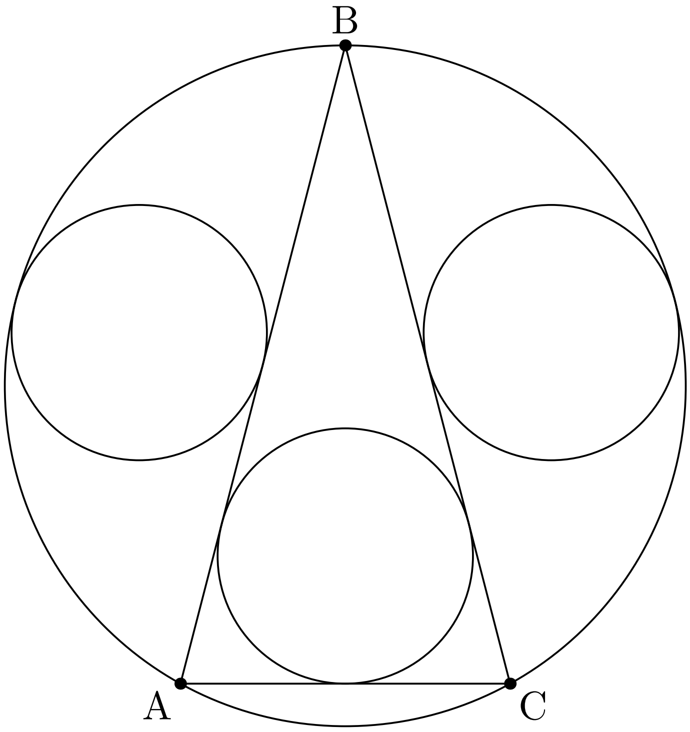

Рис. 2: к условию задачи 3.2

Старшая лига

Первый тур

1.1. Сколько решений в натуральных числа имеет уравнение $\text{НОК}(n, k) = 2^3 3^5 5^7$?

1.2. Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежат два шара, так что первый касается всех трех граней содержащих A, а второй трех граней содержащих C'. Кроме того, шары касаются между собой. Радиусы шаров равны соответственно 10 и 11. Длины ребер AB и AD равны 25 и 26. Найдите длину ребра AA'.

1.3. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость 100 лучей?

Второй тур

2.1. Вещественные числа a, b, c, d, e таковы, что $a + b + c + d + e = 8$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$. Найдите максимальное возможное значение e.

2.2. ABC — равносторонний треугольник. По одну сторону от плоскости ABC отложили перпендикулярные ей отрезки $AA' = AB$ и $BB' = AB/2$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A'B'C$.

2.3. Кузнечик прыгает по плоскости. Величина его k-го прыжка равна $1/k$, а направление можно выбирать произвольно. Может ли он посетить все рациональные точки (точки, обе координаты которых — рациональные числа)?

Третий тур

3.1. Вычислите произведение

$$\cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 3a \cdot \ldots \cdot \cos 999a,$$

где $a = 2\pi/1999$.

3.2. В окружность ω вписан четырехугольник $ABCD$, такой что $AB = AD$ и $BC = CD$ (*дельтоид*). Оказалось, что радиус вписанной окружности ABC равен радиусу окружности, касающейся меньшей дуги BC окружности ω и стороны BC в ее середине (см. рис. 3). Найдите отношение стороны AB к радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

3.3. Игра происходит на бесконечной плоскости. Играют двое: один передвигает 3 фишек волков, другой — 3 фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, затем после следующего хода волка опять какая-нибудь из овец и т. д. И волки, и овцы передвигаются за один ход не более чем на один метр. Волки передвигаются в любую сторону, а овцы —

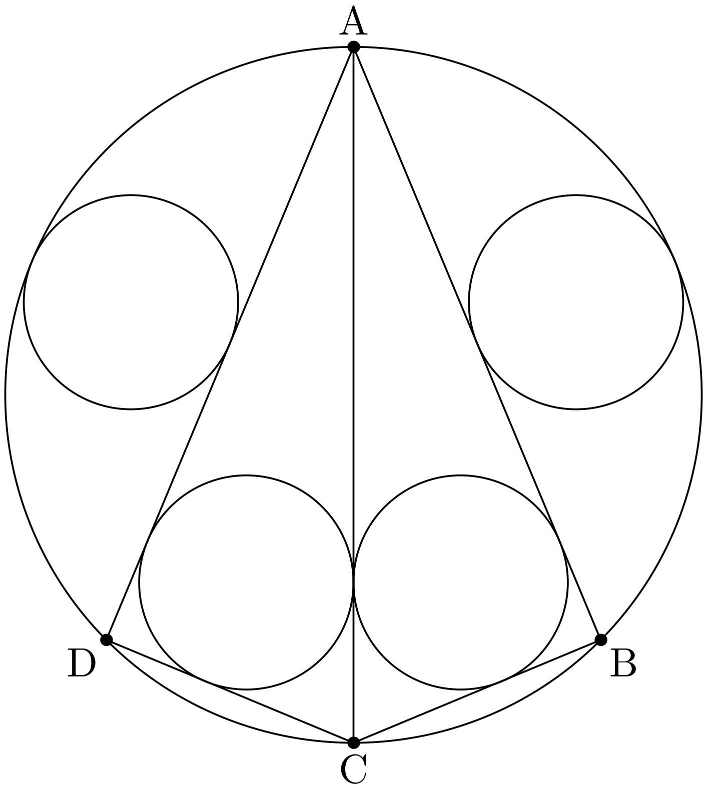

Рис. 3: к условию задачи 3.2

параллельно оси абсцисс. Верно ли, что при любой первоначальной позиции какой-нибудь волк поймает хотя бы одну овцу?

Четвёртый тур

4.1. Произведение нескольких (не обязательно различных) простых чисел в 10 раз больше, чем их сумма. Найдите эти числа.

4.2. Пусть AB — диаметр окружности ω. Прямая l касается ω в точке B. Точки C и D лежат на прямой l, причем точка B между точками C и D. Прямые AC и AD пересекают окружность ω в точках E и F соответственно. Прямые CF и DE пересекают окружность ω в точках G и H соответственно. Докажите, что $AH = AG$.

4.3. Найдите количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 20\}$, в которых количество элементов не превосходит наименьшего из них.

Решения.

Младшая лига

Первый тур

1.1. *Ответ:* не обязательно.
Предположим, что год (не високосный) начинается и кончается во вторник. Тогда он разбивается на 52 недели и заключительный вторник, так что понедельников и сред в нем поровну, а вторников на 1 больше.

1.2. $AB = 15$, $BP = 12$, $AP = 9$. Следовательно, ABP — прямоугольный треугольник. Опустим высоты PS и PT соответственно на AB и BC. Из подобия получаем $PS = AP \cdot BP/AB = 36/5$, $PT = BP^2/AB = 48/5$. Тогда $CP^2 = (BC - PS)^2 + PT^2 = 2500/25 = 100$, $CP = 10$.

1.3. *Ответ:* Тарзан.
Решение 1. Предположим, что в Рекса вцепился Джульбарс. Тогда в Джульбарса вцепился Шарик, а в Шарика — Рекс. Но тогда Тарзан и Барбос вцепились друг в друга, что невозможно. Аналогично проверяются другие возможности и устанавливается, что если в Рекса вцепился Тарзан, и при этом Рекс, Джульбарс, Барбос и Шарик вцепятся в Барбоса, Шарика, Джульбарса и Тарзана соответственно, то все условия будут выполнены.

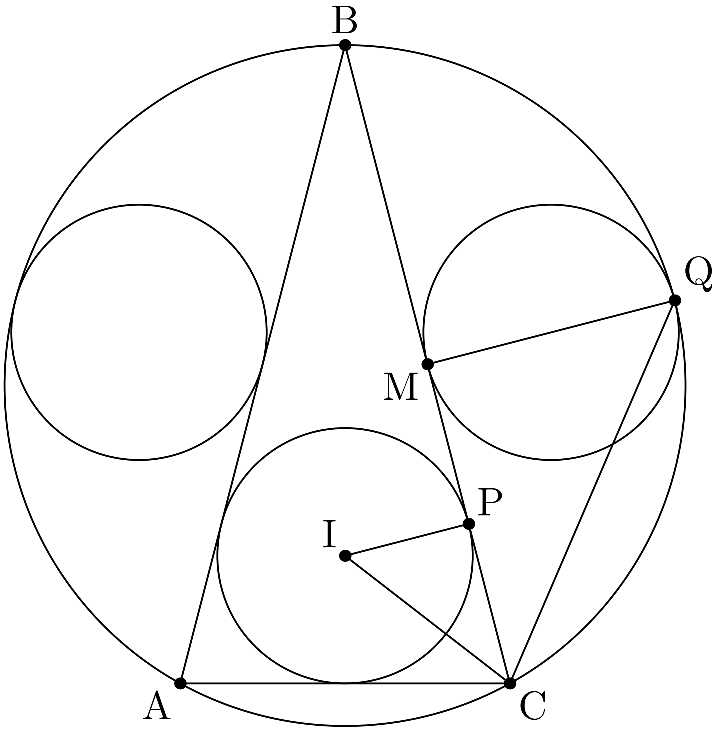

Рис. 4: к решению задачи 3.2

Решение 2. Обозначим собак точками, а вцепление — стрелками. Тогда собаки разбиваются на циклы. При этом если укрупнить шаг, двигаясь по паре соседних стрелок, то цикл окажется один. Его длина 5 и Рекс на этом цикле. Мы знаем, что происходит через один от каждой собаки, поэтому цикл однозначно выстраивается.

Второй тур

2.1. Перенесем $\sqrt{x}$ вправо, возведем в квадрат, сократим. Сделаем так трижды, получим $3 = 1 + 8\sqrt{x}$, $x = 1/16$.

2.2. Построим треугольник $\triangle PSF$ с высотой PH такой, что $\triangle PHS = \triangle ABC$ и $\triangle PHF = \triangle AED$ (просто «сложим» треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AED$ вместе). Тогда $\triangle PSF = \triangle ACD$ (по трем сторонам). Значит, $S(\triangle ACD) = S(\triangle ABC) + S(\triangle AED)$, и $S(ABCDE) = 2 \cdot (S(\triangle ABC) + S(\triangle AED)) = 1$.

2.3. *Ответ:* может.
Выделим одну пятницу в году. Пусть фигура жены Мюнхгаузена улучшается каждый день, кроме этой пятницы, а в эту пятницу ухудшается, полностью компенсируя улучшения за весь год (предшествующие и последующие). Аналогично можно поступить с лицом, выбрав другую пятницу.

Третий тур

3.1. Положим $2x = y$. Заметим, что выражение $[y] + [2y] + [3y] + [4y]$ при увеличении y от n до $n + 1$ принимает значения от $10n$ до $10n + 6$, кроме $10n + 3$, так что в указанном виде представимы все числа, оканчивающиеся на цифры 0, 1, 2, 4, 5, 6. Таких чисел от 1 до 1000 ровно 600.

3.2. *Ответ:* $AB : BC : AC = 2 : 2 : 1$.
Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, P — точка касания этой окружности со стороной BC, M — середина BC, Q — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 4). Так как $\angle ICP = 1/2\angle ACB = \angle QCM$ и $\angle IPC = 90^\circ = \angle QMC$, то $\frac{PC}{MC} = \frac{IP}{QM} = 1/2$. Также $\frac{AC}{PC} = 2$ и $\frac{BC}{MC} = 2$, следовательно, $\frac{AB}{AC} = 2$.

3.3. Покажем, что доску $2k + 1 \times 2k + 1$ без одной черной клетки (центр черный) можно разрезать на доминошки. Достаточно заметить, что если $k > 3$ то 4 квадрата $2k - 1 \times 2k - 1$ с теми же углами покрывают квадрат $2k + 1 \times 2k + 1$, а дополнение такого квадрата $2k - 1 \times 2k - 1$ до исходного квадрата $2k + 1 \times 2k + 1$ режется на прямоугольники с четной стороной, а следовательно, и на доминошки.

Четвёртый тур

4.1. Перепишем уравнение в виде $p^2 = (c-b)(c+b)$. Если обозначить $c-b=u$, $c+b=v$, то $c=(u+v)/2$, $b=(v-u)/2$, так что u и v должны быть взаимно просты, так что каждый из n простых делителей p делит ровно одно из чисел u, v. Количество способов разбить n простых делителей на два подмножества равно 2^{n-1}, это и есть ответ в задаче.

4.2. «$\Leftarrow$» Пусть каждые две противоположные стороны равны. Тогда каждые две «соседних» диагонали пересекаются в своих серединах. Тогда и все диагонали пересекаются в своих серединах. «$\Rightarrow$» Пусть все диагонали пересекаются в точке O. Докажем, что эта точка делит каждую из них пополам. Пусть $A_1O/OA_{1004} = \alpha$. Тогда, так как точки A_1, A_2, A_{1004} и A_{1005} образуют трапецию, то и $A_2O/OA_{1005} = \alpha$. Продолжая аналогично, получаем $A_3O/OA_{1006} = \alpha$, $\ldots$, $A_{1004}O/OA_1 = \alpha$. Отсюда $\alpha = 1$, что и требовалось. Далее очевидно.

4.3. Укажем выигрышную стратегию для игрока, начинающего игру. Первым ходом он ставит крестик в центральную клетку, затем он ставит всякий раз такой же знак, который поставил перед этим его противник, причем свой ход первый игрок делает в клетку, симметричную относительно центра доски клетке, только что заполненной противником.

Старшая лига

Первый тур

1.1. Если $n = 2^a3^b5^c$, $k = 2^A3^B5^C$, то пара (a, A) может принимать 7 значений (одно из чисел 3, второе от 0 до 3), пара (b, B) — 11 значений, (c, C) — 15 значений. Таким образом, ответ $7 \cdot 11 \cdot 15 = 1155$.

1.2. *Ответ:* 41.
Введем координаты с центром в A; оси направим соответственно вдоль AB, AD и AA'. Обозначим центры шаров O_1 и O_2, $AA' = x$. Тогда $O_1 = (10, 10, 10)$, $O_2 = (14, 15, x-11)$, $O_1O_2 = 21$. Получаем $4^2 + 5^2 + (x-21)^2 = 21^2$, $x^2 - 42x + 41 = 0$. Решение $x = 1$ не подходит, так как шары находятся *внутри* параллелепипеда.

1.3. *Ответ:* 4951.
100 прямых делят плоскость на $100 \cdot 101/2 + 1$ часть. Луч получается из прямой уничтожением половины. При этом не менее 2-х частей склеиваются, причем если одна система лучей содержит другую систему лучей, то число частей разбиения оказывается не меньшим. Остается заметить, что если выбрасывать только достаточно далекие лучи, то склейка произойдет только по 100 парам частей.

Второй тур

2.1. Имеем $(8-e)^2 = (a+b+c+d)^2 \leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2) = 4(16-e^2)$, так что $5e^2 \leqslant 16e$, $e \leqslant 16/5$. Равенство достигается при $e = 16/5$, $a = b = c = d = 6/5$.

2.2. *Ответ:* 45°.
Заметим, что прямая $A'B'$ пересекает плоскость ABC в точке D такой, что $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$. При этом понятно, что плоскости ABC и $A'B'C$ пересекаются по прямой CD. Также легко заметить, что $CD \perp AC$. Следовательно, $CD \perp A'C$. По определению угла между плоскостями, он равен углу между $A'C$ и AC. Это гипотенуза и катет прямоугольного равнобедренного треугольника.

2.3. *Ответ:* может.
Покажем, что он сможет обойти по одной все рациональные точки. Он движется на намеченную точку и приближается к ней на расстояние d меньше $1/n$, а текущий прыжок – $1/n$. Остается рассмотреть треугольник со сторонами d, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$; либо, в случае $d < \frac{1}{n(n+1)}$, треугольник со сторонами $d + \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$.

Третий тур

3.1. *Ответ:* 2^{-999}.
Обозначим искомое произведение за P. С помощью формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ получаем

$$\sin 2a \cdot \sin 4a \cdot \sin 6a \cdot \ldots \cdot \sin 1998a = 2^{999} \cdot P \cdot \sin a \cdot \sin 2a \cdot \ldots \cdot \sin 999a.$$

С другой стороны, $\sin 1998a = -\sin a$, $\sin 1996a = -\sin 3a$, $\ldots$, $\sin 1000a = -\sin 999a$, всего 500 равенств. Отсюда получаем, что $\sin 2a \cdot \sin 4a \cdot \sin 6a \cdot \ldots \cdot \sin 1998a = \sin a \cdot \sin 2a \cdot \sin 3a \cdot \ldots \cdot \sin 999a$. Ни один из этих синусов не равен нулю, так что $P = 2^{-999}$.

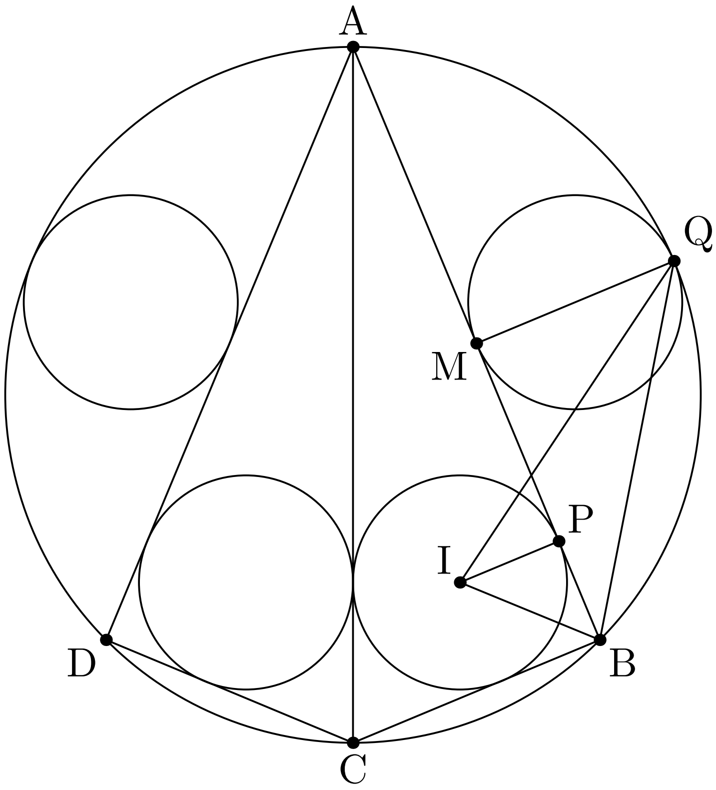

Рис. 5: к решению задачи 3.2

3.2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, P точка касания этой вписанной окружности со стороной AB, M — середина стороны AB, а Q — середина дуги AB (см. рис. 5).
Заметим что треугольник IPB равнобедренный и прямоугольный. Кроме того, по теореме о трезубце треугольник IQB тоже равнобедренный. Поэтому $\angle QPB = \angle QPI = 135°$, а следовательно $\angle MPQ = 45°$. Легко понять, что $\angle QMP = 90°$, поэтому треугольник QMP равнобедренный. Следовательно $MP = MQ$.
Таким образом отношение стороны AB к радиусу равно $2 \cdot (MP + PB)/PI = 6$.

3.3. *Ответ:* Верно.
Опишем стратегию волков.
Этап 1. Волки становятся на горизонтали овец. По принципу Дирихле есть либо два волка слева от своих овец, либо два волка справа. В силу симметрии достаточно рассмотреть первый случай. Назовем этих волков B_1 и B_2, пусть d — расстояние между соответствующими горизонталями.
Этап 2. Волк B_1 гонит свою овцу O_1 направо. Рано или поздно (если только O_1 не будет съедена) возникнет ситуация, когда волк B_1 окажется справа от O_2 причем на расстоянии большем d.
Этап 3. Волк B_1 становится на линию овцы O_2 тратя на это d ходов, при этом овца O_2 не успевает оказаться справа от волка B_2. Таким образом, она оказалась зажатой между волками B_1 и B_2 и волки ее ловят.

Четвёртый тур

4.1. Ясно, что среди наших чисел есть 2 и 5. Пусть остальные это p_1, p_2, …, p_k. Тогда обозначим $P = p_1 p_2 \dots p_k = 7 + p_1 + p_2 + \dots + p_k$. Если $k \geqslant 4$, то $p_i \leqslant P/8$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ и $7 \leqslant 7P/16 < P/2$. Складывая эти неравенства получаем, что правая часть меньше P — противоречие. При $k = 1$ получаем $7 = 0$, что не так. При $k = 2$ имеем $p_1 p_2 = 7 + p_1 + p_2$, $(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 8$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ (или наоборот). При $k = 3$ получаем $p_1 p_2 p_3 = 7 + p_1 + p_2 + p_3$. Если все p_i нечетны, то левая и правая часть разной четности. Если, скажем, $p_3 = 2$, то по четности одно из чисел p_2, p_1 тоже равно 2, и на оставшееся получаем уравнение $4p = p + 11$, не имеющее решений в целых числах. Итак, *ответ:* $\{2, 3, 5, 5\}$.

4.2. $\angle AEF = \angle ABF = \angle ADB$. Аналогично, $\angle AFE = \angle ABE = \angle ACB$. Из подобия треугольников $\triangle AEF$ и $\triangle ADC$ получаем $AE : AD = AF : AC$, следовательно $AE : AF = AD : AC$. Тогда из подобия треугольников $\triangle AED$ и $\triangle AFC$ получаем $\angle AED = \angle AFC$. Тогда хорды AG и AH лежат напротив равных углов.

4.3. *Ответ:* $17711 = F_{21}$ (21-е число Фиббоначи).

Понятно, что количество подмножеств требуемого вида, содержащих ровно m элементов, равно C_{21-m}^m. Тогда искомое число — S_{21}, где $S_n = \sum_{k+m=n} C_k^m$. Заметим, что из равенства $C_k^m = C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}$ следует $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Так как $S_0 = S_1 = 1$, то S_n — это n–е число Фиббоначи.