49. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мадрид, Шпанија – среда, 16. јул 2008.

1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Круг чији је центар средиште дужи BC и који садржи H сече праву BC у тачкама A_1 и A_2. Аналогно, круг чији је центар средиште дужи CA и који садржи H сече праву CA у тачкама B_1 и B_2, а круг чији је центар средиште дужи AB и који садржи H сече праву AB у тачкама C_1 и C_2. Доказати да тачке A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 припадају једном кругу. *(Русија)*

2. (а) Доказати да је

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$$

за све реалне бројеве x, y, z такве да ниједан од њих није једнак 1 и за које важи $xyz = 1$.

(б) Доказати да се једнакост достиже за бесконачно много тројки рационалних бројева x, y, z таквих да ниједан од њих није једнак 1 и за које важи $xyz = 1$.

(Аустрија)

3. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да n^2+1 има прост делилац већи од $2n+\sqrt{2n}$. *(Литванија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

49. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мадрид, Шпанија – четвртак, 17. јул 2008.

4. Одредити све функције $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (тј. f је функција која слика позитивне реалне бројеве у позитивне реалне бројеве) такве да је

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

за све позитивне реалне бројеве w, x, y, z за које важи $wx = yz$. *(Јужна Кореја)*

5. Нека су n и k природни бројеви за које је $k \geqslant n$ и $k - n$ паран број. Дато је $2n$ лампи означених бројевима $1, 2, \ldots, 2n$; свака од њих може бити *укључена* или *искључена*. У почетку су све лампе искључене. Посматрајмо низове *корака*: у сваком од корака мења се стање тачно једне лампе (укључена постаје искључена, а искључена укључена).

Нека је N број таквих низова од k корака који дају стање у коме су све лампе од 1 до n укључене, а све лампе од $n + 1$ до $2n$ искључене.

Нека је M број таквих низова од k корака који дају стање у коме су све лампе од 1 до n укључене, а све лампе од $n + 1$ до $2n$ искључене, и притом ниједном није мењано стање лампи од $n + 1$ до $2n$.

Израчунати N/M. *(Француска)*

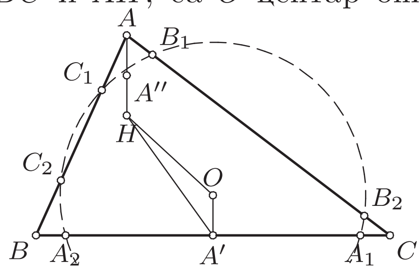
6. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао код кога је $|BA| \neq |BC|$. Нека су ω_1 и ω_2 уписани кругови троуглова ABC и ADC, редом. Претпоставимо да постоји круг ω који додирује полуправу BA иза тачке A и полуправу BC иза тачке C, а који истовремено додирује и праве AD и CD. Доказати да се спољашње заједничке тангенте кругова ω_1 и ω_2 секу на ω. *(Русија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Означимо са A' и A'' редом средишта дужи BC и AH, са O центар описаног круга и са R његов полупречник. Тада је $OA_1^2 = OA'^2 + A'A_1^2 = OA'^2 + A'H^2 = \frac{1}{2}(A'A''^2 + OH^2)$ по правилу паралелограма за паралелограм $OA'HA''$, што је даље једнако $\frac{1}{2}(R^2 + OH^2)$ јер је и $OA'A''A$ паралелограм. Исти израз се добија за дужине OA_2, OB_1, OB_2, OC_1, OC_2, па тачке $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ леже на кругу са центром O.



Друго решење. Означимо са A', B', C' редом средишта BC, CA и AB. Тада је $CA_1 \cdot CA_2 = (CA' - A'A_1)(CA' + A'A_1) = \frac{b^2}{4} - A'H^2$ и аналогно $CB_1 \cdot CB_2 = \frac{a^2}{4} - B'H^2$. Како је $CH \perp A'B'$, имамо $A'H^2 - B'H^2 = A'C^2 - B'C^2 = \frac{b^2 - a^2}{4}$, одакле следи $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$, дакле A_1, A_2, B_1 и B_2 леже на неком кругу k_c. Аналогно, тачке B_1, B_2, C_1, C_2 су на неком кругу k_a, а тачке C_1, C_2, A_1, A_2 на кругу k_b.

Ако су кругови k_a, k_b и k_c међусобно различити, њихове радикалне осе по паровима су BC, CA и AB, што је немогуће јер ове праве не припадају једном прамену. Према томе, ова три круга морају да се поклапају.

2. (а) Сменом $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$, $c = \frac{z}{z-1}$ услов из задатка постаје $a + b + c = ab + bc + ca + 1$, а неједнакост постаје $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1$. Како је тада $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2 = (a+b+c-1)^2 + 1$, тражена неједнакост одмах следи, а једнакост важи ако је $a + b + c = 1$ и $ab + bc + ca = 0$.

(б) Треба да покажемо да постоји бесконачно много тројки бројева $a, b, c \in \mathbb{Q}$ са $a + b + c = 1$ и $ab + bc + ca = 0$. Убацивање $c = 1 - a - b$ у другу једначину даје $a^2 + ab + b^2 - a - b = 0$. Стављањем $b = ta$ ова једначина постаје $(t^2 + t + 1)a^2 = (t + 1)a$, одакле је $a = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ и $b = \frac{t^2+t}{t^2+t+1}$. Сада је $c = 1 - a - b = \frac{-t}{t^2+t+1}$, дакле $(a, b, c) = (\frac{t+1}{t^2+t+1}, \frac{t^2+t}{t^2+t+1}, \frac{-t}{t^2+t+1})$ задовољава услове једнакости за свако $t \in \mathbb{Q}$.

3. Познато је да простих бројева облика $p = 4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) има бесконачно много и да за свако такво p важи $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, што значи да постоји тачно један природан број n, $n < \frac{p-1}{2}$ такав да је $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Тада $n^2 + 1$ има прост делилац p већи од $2n$. Показаћемо да за $p > 20$ у ствари важи $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Означимо $k = p - 2n$. Из $p \mid (2n)^2 + 4 \equiv k^2 + 4 \pmod{p}$ добијамо да је $k^2 \geqslant p - 4 = 2n + k - 4 > 2n$ јер је $k \geqslant \sqrt{p-4} > 4$. Зато је $p > 2n + \sqrt{2n}$ и $p \mid n^2 + 1$.

Напомена. Мало напреднијим методама из аналитичке теорије бројева може да се добије јача оцена: $p \sim n \ln n$.

4. За $x = y = z = w$ функционална једначина даје $f(x)^2 = f(x^2)$ за све $x \in \mathbb{R}_+$. Одатле је $x = 1$. Сада стављањем $w = 1$, $y = z = \sqrt{x}$ у полазну једначину добијамо $\frac{1+f(x)^2}{2f(x)} = \frac{1+x^2}{2x}$, што је еквивалентно са $(f(x) - x)(f(x) - \frac{1}{x}) = 0$, тј. $f(x) \in \{x, \frac{1}{x}\}$ за све x.

Претпоставимо да за неке $x, w \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ важи $f(x) = x$ и $f(w) = \frac{1}{w}$. Ако одаберемо $y = z = \sqrt{wx}$, полазна једначина нам даје $\frac{1/w^2+x^2}{2f(wx)} = \frac{w^2+x^2}{2wx}$. Међутим, за $f(wx) = wx$ ова једнакост повлачи $w = 1$, док за $f(wx) = \frac{1}{wx}$ даје $x = 1$, контрадикција. Следи да је $f(x) = x$ за све $x > 0$ или $f(x) = \frac{1}{x}$ за све $x > 0$. Лако се проверава да ове функције задовољавају полазну једначину.

5. Низ корака након кога су лампе од 1 до n укључене а остале искључене зовемо *допустивим.* Ако притом сијалице од $n + 1$ до $2n$ нису диране, зовемо га *строгим.* Дакле, има N допустивих низова, од којих су M строги; јасно је да су $M, N > 0$. У сваком допустивом низу, свакој сијалици од 1 до n промењено је стање непаран број пута, а свакој од осталих паран број пута.

Посматрајмо строг низ корака $\mathcal{P}$. Нека је у њему лампи i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ мењано стање m_i пута. Приметимо да је $m_1+m_2+\cdots+m_n = k$. Ако за свако i одаберемо паран број од тих m_i корака и заменимо их корацима на лампи $n+i$, добићемо допустив низ корака. За дато i, ти кораци се могу одабрати на 2^{m_i-1} начина (јер толико има подскупова m_i-елементног скупа са парном кардиналношћу). Укупно, овим поступком од строгог низа корака $\mathcal{P}$ можемо направити допустив низ на тачно $\prod_{i=1}^{n} 2^{m_i-1} = 2^{n-k}$ начина.

С друге стране, сваки допустив низ корака се може добити из само једног строгог низа (оног који се добије кад се сви кораци на ма којој сијалици j за $j > n$ замене кораком на сијалици $j-n$), и то на само један начин. Према томе, овако је успостављено "$1 \leftrightarrow 2^{n-k}$" пресликавање између строгих и допустивих низова корака. Следи да је $N/M = 2^{n-k}$.

Друго решење. Број допустивих низова корака у којима је лампи i мењано стање α_i пута $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ једнак је $\frac{k!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_{2n}!}$. Отуда је

$$M = k! \cdot \sum \left\{ \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} : \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k, 2 \nmid \alpha_1, \ldots, 2 \nmid \alpha_n \right\}. \tag{1}$$

Слично добијамо

$$N = k! \cdot \sum \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n! \cdot \beta_1! \cdots \beta_n!},$$

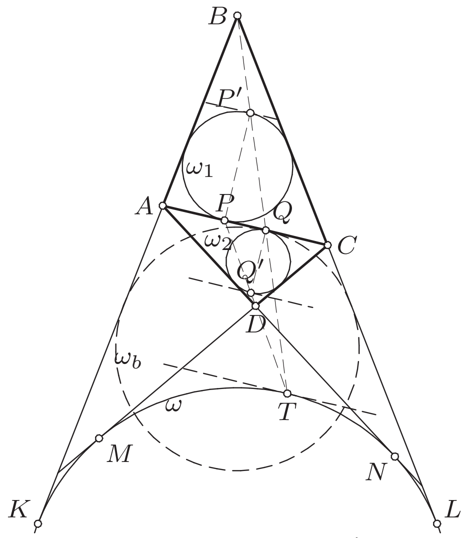
где сума иде по свим $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ за које је $\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n = k$, $2 \nmid \alpha_1$, …, $2 \nmid \alpha_n$, $2 \mid \beta_1$, …, $2 \mid \beta_n$.

Сума у (1) је једнака коефицијенту уз x^k у развоју $f(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^n = \operatorname{sh}^n x$, док је сума у (2) једнака коефицијенту уз x^k у развоју

$$g(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^n \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^n = \operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \frac{1}{2^n}\operatorname{sh}^n 2x.$$

Ако запишемо степени ред $\operatorname{sh}^n x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ за неке реалне бројеве a_i, онда је $\operatorname{sh}^n 2x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i x^i$. Следи да је $M = \frac{k!}{2^n} \cdot 2^k a_k$ и $N = k! \cdot a_k$, па је $N/M = 2^{n-k}$.

6. Нека ω додирује праве AB, BC, CD, DA редом у тачкама K, L, M, N. Тада је $BA + AD = BA + AN - DN = BK - DN = BL - DM = BC + CM - DM = BC + CD$. То значи да, ако са P и Q означимо додирне тачке ω_1 и ω_2 редом са AC, важи $AP = \frac{AC+AB-BC}{2} = \frac{AC+CD-AD}{2} = CQ$. Другим речима, приписани круг ω_b наспрам B у $\triangle ABC$ додирује AC управо у Q.



Посматрајмо хомотетију $\mathcal{H}_B$ са центром B која слика ω_b у ω и означимо $T = \mathcal{H}_B(Q)$. На основу "великог задатка", тачка P' дијаметрално супротна тачки P на ω_1 лежи на правој BQ, а тачка Q' дијаметрално супротна тачки Q на ω_2 лежи на DP. Тангенте у P', Q' и T на ω_1, ω_2 и ω редом паралелне су правој AC. Следи да хомотетија са центром D која слика ω_2 у ω слика тачку Q' у T, па су тачке T, D, Q', P колинеарне. Значи, праве $P'Q$ и PQ' се секу у тачки T, па како је $PP' \parallel QQ'$, тачка T је центар хомотетије која слика ω_1 у ω_2, одакле следи тврђење.