49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Среда, 16.07.2008.

Задатак 1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Кружница чији је центар средиште дужи BC и која садржи H сече праву BC у тачкама A_1 и A_2. Аналогно, кружница чији је центар средиште дужи CA и која садржи H сече праву CA у тачкама B_1 и B_2, а кружница чији је центар средиште дужи AB и која садржи H сече праву AB у тачкама C_1 и C_2. Доказати да тачке A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 припадају једној кружници.

Задатак 2. (а) Доказати да је

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

за све реалне бројеве x, y, z, такве да ниједан од њих није једнак 1 и за које важи $xyz = 1$.

(б) Доказати да се једнакост достиже за бесконачно много тројки рационалних бројева x, y, z, таквих да ниједан од њих није једнак 1 и за које важи $xyz = 1$.

Задатак 3. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да $n^2 + 1$ има прост делилац већи од $2n + \sqrt{2n}$.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Четвртак, 17.07.2008.

Задатак 4. Одредити све функције $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (тј. f је функција која слика позитивне реалне бројеве у позитивне реалне бројеве) за које је

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

за све позитивне реалне бројеве w, x, y, z за које важи $wx = yz$.

Задатак 5. Нека су n и k природни бројеви за које је $k \geqslant n$ и $k - n$ паран број. Дато је $2n$ лампи, означених бројевима $1, 2, \ldots, 2n$; свака од њих може бити у једном од следећа два стања: *укључена* или *искључена*. У почетку су све лампе искључене. Посматрајмо низове *корака*: у сваком од корака мења се стање тачно једне лампе (укључена постаје искључена, а искључена укључена).

Нека је N број таквих низова од k корака, тако да се добије стање у коме су све лампе означене бројевима 1 до n укључене, а све лампе означене бројевима $n + 1$ до $2n$ искључене.

Нека је M број таквих низова од k корака, тако да се добије стање у коме су све лампе означене бројевима 1 до n укључене, а све лампе означене бројевима $n + 1$ до $2n$ искључене и притом ниједном није мењано стање лампи означених бројевима $n + 1$ до $2n$.

Израчунати N/M.

Задатак 6. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао код кога је $|BA| \neq |BC|$. Нека су ω_1 и ω_2 уписане кружнице троуглова ABC и ADC, редом. Нека постоји кружница ω која додирује полуправу BA након тачке A и полуправу BC након тачке C, а која истовремено додирује и праве AD и CD. Доказати да се заједничке спољашње тангенте кружница ω_1 и ω_2 секу на ω.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена