Concursul International de Matematica „Arhimede”, IMAC

Букурешт, Румунија 15. и 16.06.2009.

Задаци:

Први дан

Задатак 1. Одредити све просте бројеве p тако да је $1 + p \cdot 2^p$ потпун квадрат.

Задатак 2. У троуглу ABC симетрала унутрашњег угла код темена A сече страницу BC у тачки A_1, а круг описан око троугла ABC у тачки A_2. Аналогно дефинишемо и тачке B_1, B_2, C_1 и C_2. Доказати неједнакост

$$\frac{A_1A_2}{BA_2 + A_2C} + \frac{B_1B_2}{CB_2 + B_2A} + \frac{C_1C_2}{AC_2 + C_2B} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Задатак 3. Нека је $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Доказати неједнакост

$$\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}} + \sqrt{\frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}} \geqslant 1.$$

Други дан

Задатак 1. Нека је $ABCD$ прозивољан тетраедар. Нека су E и F средишта страница AB и CD, редом. Уколико је α угао између правих AD и BC, одредити $\cos\alpha$ у зависности од дужина EF, AD и BC.

Задатак 2. Нека је E пресек дијагонала тетивног четвороугла $ABCD$. Нека су K и M средишта страница AB и CD, редом, а L и N подножја нормала из E на странице BC и DA, редом. Доказати да је $KM \perp LN$.

Задатак 3. Дат је скуп $U = \{1, 2, 3, \ldots, 6024\}$. Уколико је U подељен на три подскупа са по 2008 елемента, доказати да се могу изабрати бројеви a, b и c из различитих подскупова тако да је $a = b + c$.